N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPECIALITÉ

(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Jean-Pierre OBIN

SUJET

FORCE PORTANTE EN DEFORMATION PLANE D'UN SOL VERTICALEMENT NON-HOMOGENE

Soutenue le 15 Février 1972, devant la Commission d'Examen

M. KRAVTCHENKO	Président
M. ANGLES D'AURIAC	Examinateurs
M. NEGRE	
M. GIROUD	

GRENOBLE

N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPECIALITÉ

(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Jean-Pierre OBIN

SUJET

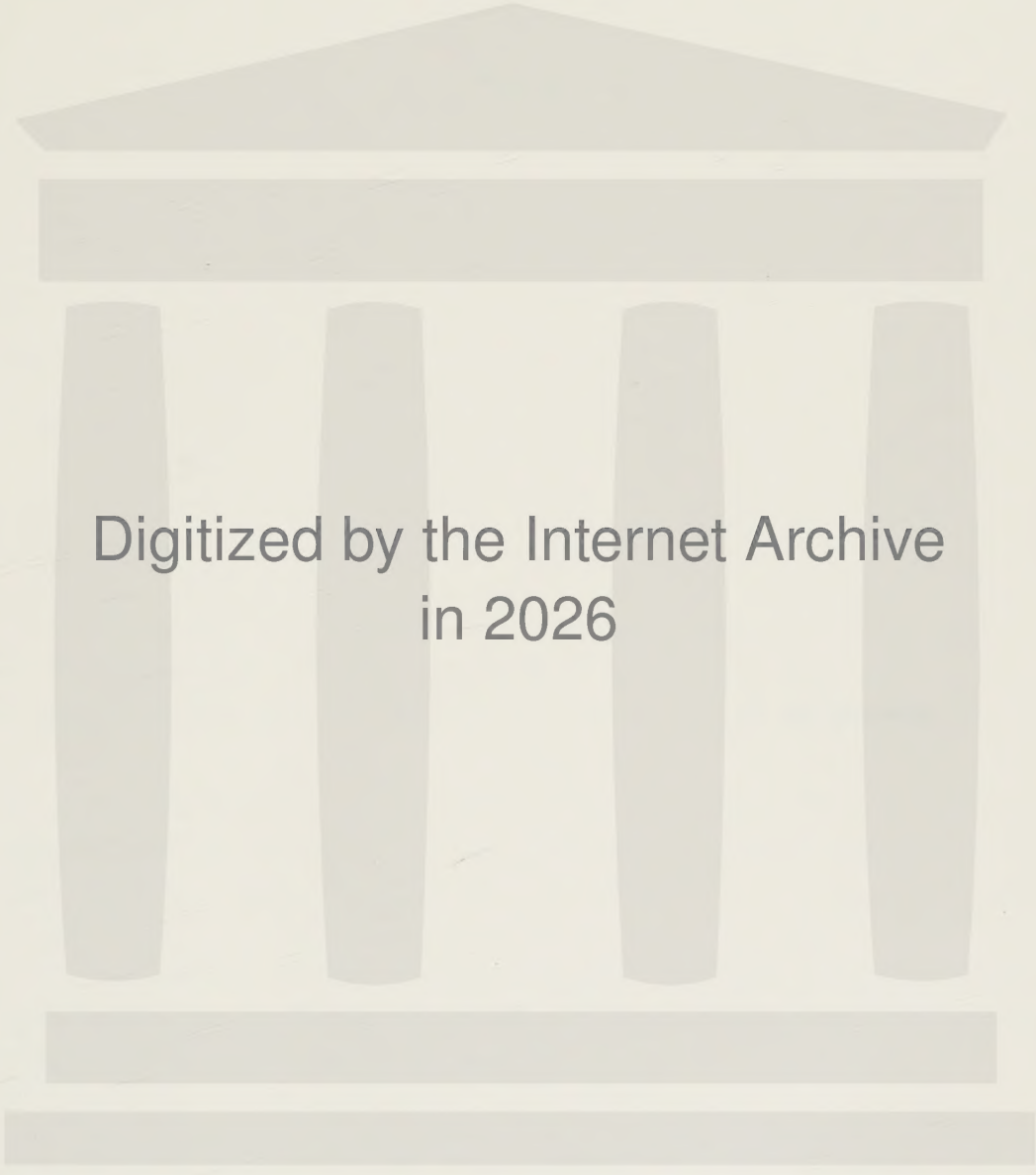
FORCE PORTANTE EN DEFORMATION PLANE D'UN SOL VERTICALEMENT NON-HOMOGENE

Soutenue le 15 Février 1972, devant la Commission d'Examen

M. KRAVTCHENKO	Président
M. ANGLES D'AURIAC	Examinateurs
M. NEGRE	
M. GIROUD	

GRENOBLE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544313_0033

à mes parents

AVANT-PROPOS

Les études et recherches dont les résultats sont exposés dans ce mémoire ont été réalisés à l'Institut de Mécanique de Grenoble.

Le Professeur KRAVTCHENKO qui m'a initié aux différents aspects de la théorie de la plasticité a bien voulu me faire l'honneur de présider mon Jury.

Le Professeur ANGLES D'AURIAC et Monsieur NEGRE m'ont enseigné les éléments de rhéologie et de mathématiques nécessaires à tout Mécanicien du Sol. Je suis heureux qu'ils aient pu accepter de faire partie de ce Jury.

Que Monsieur GIROUD, qui par ses nombreuses suggestions a tenté de me faire effectuer un travail qui soit le plus utile possible à l'ingénieur, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur PIN, de la SOCOTEC, ainsi que Messieurs PERA, GIROUSSE, PAREZ et O'ZANNE, du Groupe de Projet sur les fondations superficielles pour s'être intéressés à mes travaux.

Je me souviens avec plaisir du stage que j'ai effectué dans les laboratoires du C.E.B.T.P. où Messieurs TCHENG et LEBEGUE ont bien voulu m'introduire.

Je dois exprimer à Monsieur TRÂN-VÔ-NHIÊM ma sincère reconnaissance pour le temps qu'il a pu consacrer à de précieuses remarques, qui imprègnent une bonne partie de ce mémoire.

Les conseils du Professeur BIAREZ, de Monsieur BOEHLER, de Monsieur GRESILLON et de Monsieur RABATEL me furent à plusieurs reprises bien utiles.

Le travail bibliographique n'aurait pu être effectué sans l'aide de Monsieur SALOMON puis de Mesdemoiselles SAULNIER et FELIX-NAIX. Celle-ci a également contribué, ainsi que Madame CIALDELLA et Mademoiselle SOLARO à dactylographier mon manuscrit. Enfin, Monsieur ELBERG a assuré avec le soin et la minutie qui lui sont habituels, l'impression de ce mémoire. Qu'ils en soient tous vivement remerciés.

Je ne voudrais pas terminer sans avoir exprimé mon affectueuse reconnaissance à ma femme dont l'aide morale fut pour moi un constant encouragement tout au long de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Page

AVANT-PROPOS

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I - Introduction générale 7

CHAPITRE II- Calcul de la force portante d'un sol bicouche par la méthode du cercle de glissement 12

2.1 Notations du chapitre II 14

2.2 Introduction 17

2.2.1. Hypothèse d'une ligne de glissement circulaire - Validité de cette hypothèse 17

2.2.2. Méthode du cercle de glissement 19

2.2.3. Résumé de la méthode 19

2.2.4. Nature des paramètres mécaniques du sol, c et ϕ (ou c_1, ϕ_1, c_2, ϕ_2) et γ 20

2.3 Description de la méthode de calcul. Cas du milieu homogène pesant 21

2.3.1. Principe du calcul 21

2.3.2. Hypothèse supplémentaire 23

2.3.3. Résolution du problème 25

2.4 Principe du calcul en milieu bicouche le plus général (pesant, c_1, ϕ_1; c_2, ϕ_2) 27

2.4.1. Présentation du problème 27

2.4.2. Existence de deux cohésions 27

2.4.3. Existence de deux angles de frottement interne ... 27

2.4.4. Cas général $c_1 \neq 0$ 30

2.4.5. Cas où la couche supérieure est pulvérulente ($c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$) 30

2.4.6. Cas du bicouche pulvérulent ($c_1 = c_2 = 0$) 30

2.4.7. Discussion 30

2.4.8. Recherche du cercle correspondant à la valeur minimale de la force portante 32

2.5 Présentation des résultats 36
2.5.1. Cas où $c_1 \neq 0$ 36
2.5.2. Cas où $c_2 \neq 0$, $c_1 = 0$ 36
2.5.3. Cas où $c_1 = c_2 = 0$ 37
2.5.4. Cas où $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 37
2.5.5. Cas d'une assise rocheuse 37
2.5.6. Résumé 37
2.6 Analyse des résultats en fonction de $\frac{H}{B}$ 39
2.7 Etude de l'influence du choix d'une ligne circulaire 42
2.8 Comparaison des résultats obtenus à l'aide de cercles de glissement, avec ceux des autres méthodes, pour un milieu homogène 46
2.8.1. Valeurs de N_γ 46
2.8.2. Valeurs de N_c 46
2.9 Utilisation des abaques 49
2.9.1. Interpolation 49
2.9.2. Exemple 49
2.10 Problème de la force portante à long terme d'un sol avec présence d'une nappe 51
2.10.1. Cas général 51
2.10.2. Simplification 51
2.10.3. Remarques 55
2.10.4. Remarque sur les résultats 55
2.10.5. Présentation pratique des résultats 55

CHAPITRE III - Force portante d'un sol bicouche composé d'une couche pulvérulente reposant sur une assise purement cohérente 57
3.1 Notations du chapitre III 59
3.2 Introduction 60
3.3 Travaux effectués au Centre Expérimental du Bâtiment et des Travaux Publics (C.E.B.T.P.) à Paris 60
3.3.1. Travaux expérimentaux 60
3.3.2. Travaux théoriques 64
3.4. Travaux de KOÏZUMI 74
3.5. Travaux de YAMAGUCHI 77
3.6. Autres travaux 81
3.6.1. Formule de SOWADA 81
3.6.2. Calculs de CARIOU et CAZENAVE 81
3.6.3. Travaux de TOCHKOV 82

3.7. Conclusion du Chapitre III 83
3.7.1. Comparaison des résultats proposés par les différents auteurs 83
3.7.2. Largeur optimale, pression portante maximale 83
3.7.3. Influence d'une surcharge, cas des fondations profondes 85

CHAPITRE IV - Force portante d'une couche de sol d'épaisseur limitée reposant sur une assise rigide 89
4.1. Notations du Chapitre IV 91
4.2. Introduction 92
4.3. Travaux expérimentaux 93
4.3.1. Essais sur matériaux purement cohérents réalisés au C.E.B.T.P. 93
4.3.2. Essais de BROWN sur argile 99
4.3.3. Essais sur milieu pulvérulent bidimensionnel 100
4.3.4. Essais sur milieu pulvérulent tridimensionnel 101
4.4. Calcul de la force portante limite en faisant l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire 104
4.4.1. Généralités 104
4.4.2. Travaux de M.A. SENS 104
4.5. Travaux utilisant la théorie du poinçonnement d'une plaque 105
4.5.1. Travaux de HILL 105
4.5.2. Travaux de MEYERHOF et CHAPLIN 108
4.5.3. Travaux de LIVNEH et VYALOV 110
4.5.4. Travaux de YAMAGUCHI et TERASHI 111
4.6. Travaux de SALENÇON 114
4.6.1. Théorie des charges limites 114
4.6.2. Etude du poinçonnement d'une plaque 119
4.6.3. Force portante limite d'une couche de sol d'épaisseur limitée 122
4.6.3.1. Matériau de TRESCA 122
4.6.3.2. Matériau de COULOMB 122
4.7. Conclusion du Chapitre IV 129
4.7.1. Comparaison des résultats proposés par les différents auteurs 129
4.7.2. Fondation sur une couche de sol purement cohérent, d'épaisseur limitée, au voisinage d'une tranchée ... 129

CHAPITRE V - Force portante d'un sol purement cohérent et verticalement non-homogène 135
5.1. Notations du chapitre V 137
5.2. Introduction 139
5.3. Travaux expérimentaux 140
5.3.1. Travaux de TCHENG 140
5.3.2. Travaux de BROWN et MEYERHOF 142
5.4. Calcul de la force portante limite, en faisant l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire 145
5.4.1. Travaux de BUTTON 145
5.4.2. Travaux de JAMES, KRIZEK et BAKER 148
5.4.3. Travaux de CARIOU et CAZENAVE 151
5.5. Travaux utilisant la théorie du corps rigide-parfaitement plastique non-homogène 153
5.5.1. Théorie du corps non-homogène en plasticité parfaite 153
5.5.2. Cas où la non-homogénéité est faible 159
5.5.3. Cas de la non-homogénéité transversale 160
5.5.4. Cas d'une discontinuité de la cohésion 160
5.5.5. Cas où la cohésion ne varie qu'en fonction de la profondeur 163
5.5.6. Travaux de OSTROWSKA 163
5.6. Conclusion du Chapitre V 168
5.6.1. Comparaison des résultats proposés par les différents auteurs 168
5.6.1.1. Cas du bicouche 168
5.6.1.2. Cas du sol stratifié horizontalement 168
5.6.2. Valeur de la cohésion de la couche inférieure à partir de laquelle on peut la considérer comme une assise rigide 171
5.6.3. Etude du champ des contraintes au voisinage de la ligne frontière entre deux régions de cohésions constantes 171
CHAPITRE VI - Remarques sur la force portante d'un sol anisotrope ... 175
6.1. Notations du Chapitre VI 177
6.2. Introduction 178
6.3. Travaux de SIVA-REDDY et SRINIVASAN 179
6.3.1. Généralités 179
6.3.2. Résultats 179

6.4. Travaux de DAVIS et CHRISTIAN 182
6.4.1. Généralités 182
6.4.2. Hypothèses 182
6.4.3. Déroulement des calculs 184
6.4.4. Résultats 184
6.4.5. Remarque 185

CHAPITRE VII - Notes sur la force portante de pointe des fondations profondes 187
7.1. Introduction 188
7.2. Sol tricouche 188
7.3. Sol bicouche 190

CHAPITRE VIII - Etude de deux "cas historiques" 192
8.1. Dislocation d'un ouvrage par suite du fluage du sol de fondation 193
8.1.1. Description de l'ouvrage 193
8.1.2. Description du sol de fondation 193
8.1.3. Fondation de l'ouvrage 193
8.1.4. Description du sinistre 195
8.1.5. Calcul de la pression portante du sol 195
8.2. Rupture du sol de fondation d'un silo à blé 196
8.2.1. Ouvrage et sol de fondation 196
8.2.2. Description du sinistre 196
8.2.3. Calcul de la pression portante du sol 196

CHAPITRE IX - Conclusion Générale 199

CHAPITRE X - Bibliographie 203

ANNEXE I
A1-1 Etude du discriminant de l'équation 2-9 II
A1-2 Calcul de la force portante du milieu bicouche le plus général IV
A1-3 Même calcul pour $c_1 = 0$ VI
A1-4 Même calcul pour $c_1 = c_2 = 0$ VII
A1-5 Etude de l'hypothèse relative à la répartition des contraintes normales sur le cercle de glissement VIII
A1-6 Calcul de la force portante d'un sol où a été décelée la présence d'une nappe XII
A1-7 Programme des calculs numériques XIV
A1-8 Exemples d'abaques en coordonnées métriques XXIII

ANNEXE II 37 abaques hors-texte, présentant les résultats des calculs effectués au Chapitre II.

"Men cease to build where the foundations sinkes"

John Webster

The Duchess of Malfi (1624)

Acte III, Scène 5.

("Les hommes cessent de bâtir là où les fondations s'enfoncent")

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

Depuis que TERZAGHI proposa sa formule de force portante d'un sol de fondation, plusieurs auteurs ont affiné sa méthode et proposé de nouvelles valeurs des coefficients N_c, N_q , N_γ , dans le cas d'un massif semi-infini et homogène.

En réalité, il est rare qu'un sol puisse être considéré comme tel. Néanmoins les coefficients et la formule de TERZAGHI peuvent s'appliquer, dans de nombreux cas, pour vérifier que l'ouvrage projeté est largement dans le sens de la sécurité vis-à-vis de la force portante (fondations de petites dimensions, ouvrages légers, etc.).

Mais, les sites urbains de très forte capacité portante s'épuisant et les ouvrages s'alourdissant, les cas sont nombreux où l'ingénieur aimerait avoir à sa disposition un outil plus fin que la formule et les coefficients de TERZAGHI , en particulier lorsque le sol comporte plusieurs couches approximativement horizontales ou lorsqu'il existe, à une faible profondeur, un substratum rocheux. Il faut attendre les années 50 pour voir plusieurs chercheurs commencer à affronter ces problèmes.

On peut aisément distinguer à l'heure actuelle, dans la littérature internationale, trois sujets d'attention principaux :

1- *LE SOL DE FONDATION EST UN BICOUCHE COMPOSE D'UN MILIEU PULVERULENT REPOSANT SUR UNE ASSISE PUREMENT COHERENTE.*

Dès 1953, TCHENG commença à publier des résultats expérimentaux obtenus au C.E.B.T.P. Il en déduisit, quelques années plus tard, des formules semi-empiriques destinées à l'ingénieur. Depuis, l'équipe du C.E.B.T.P. a poursuivi ces travaux expérimentaux, tandis que des chercheurs Japonais proposaient des méthodes de calcul destinées à résoudre ce problème.

2- *LE SOL DE FONDATION EST COMPOSE D'UNE COUCHE DE SOL D'EPAISSEUR FINIE REPOSANT SUR UN SUBSTRATUM ROCHEUX.*

Dès 1948, JAKOBSON publia une étude théorique réalisée dans le cas particulier où le sol doit supporter un remblai routier. Divers travaux expérimentaux furent ensuite effectués dans le but de mieux connaître ce problème, en particulier ceux réalisés au C.E.B.T.P. (HABIB), à GRENOBLE (HAERINGER) et au CANADA (MEYERHOF et MILOVIC).

Par ailleurs, une solution théorique fondée sur la théorie des charges limites pour un corps rigide parfaitement plastique, vient d'être proposée par SALENÇON ; elle vient sans doute clore pour assez longtemps les recherches théoriques sur ce problème.

3- *LE SOL DE FONDATION EST PUREMENT COHERENT, IL EST COMPOSE D'UNE OU DE DEUX COUCHES DONT LA COHESION PEUT VARIER AVEC LA PROFONDEUR.*

C'est en 1953 que BUTTON proposa le premier une solution théorique à ce problème, solution fondée sur l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire. D'autres solutions théoriques ont par la suite été publiées par des chercheurs Indiens (SIVA REDDY), et par l'Ecole Polonaise de Plasticité (OSTROWSKA) durant les années 60. Enfin, d'importants travaux expérimentaux, dûs à J.D. BROWN, ont été réalisés à l'Université de HALIFAX (CANADA), sous la direction de MEYERHOF.

Pour notre part, nous nous sommes attaché à fournir une solution théorique approchée au problème de la force portante limite d'une fondation reposant sur un sol bicouche pesant, ayant des propriétés mécaniques quelconques. Dans le Chapitre 2, nous proposons cette solution en fondant nos calculs sur l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire. Les résultats sont présentés dans une série d'abaques, utilisables par l'ingénieur, rassemblés dans l'Annexe 2.

Dans les Chapitres 3, 4 et 5, nous avons repris un à un les trois problèmes cités plus haut en nous efforçant de faire ressortir la validité des hypothèses des différents auteurs, et en mettant en évidence les points d'accord -ou bien les divergences- pouvant exister sur un même problème abordé par des approches différentes (expérimentale, empirique, théorique). Nous avons également essayé de dégager des directions pour des recherches ultérieures, théoriques ou appliquées.

Dans les Chapitres 6 et 7, nous avons fait figurer quelques notes et quelques références, bien incomplètes, sur deux questions annexes : sol anisotrope, fondations profondes.

Enfin, après avoir pu appliquer sur deux "cas historiques" de rupture du sol de fondation les résultats contenus dans ce mémoire, le lecteur peut trouver d'abondantes références bibliographiques, classées par sujet, qui doivent lui faciliter la tâche s'il compte poursuivre ou développer nos recherches.

CHAPITRE II

CALCUL DE LA FORCE PORTANTE D'UN SOL BICOUCHE PAR LA METHODE DU CERCLE DE GLISSEMENT

2.1 NOTATIONS

$A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$) coefficients d'équations du 2e degré ($C_1 \neq 0$)

$A_2, B_2, C_2, A'_2, B'_2, C'_2$) " " " " ($C_1 = 0$) ($C_2 = 0$)

$A_3, B_3, C_3, A'_3, B'_3, C'_3$) " " " " ($C_1 = C_2 = 0$)

A_4, B_4, C_4 " " " " (cas de la nappe)

B : largeur de la fondation.

G : poids volumique des grains de sol.

H : hauteur de la couche supérieure (bicouche).

$H' = \frac{H}{B}$

H'_o : valeur de H' à partir de laquelle la couche inférieure n'intervient plus.

H''_o : profondeur relative atteinte par la ligne de glissement dans le cas d'un sol homogène

H_1, H_2, H_3 : profondeurs du sol humide, du sol saturé et de la nappe, respectivement.

L : longueur du funiculaire de $\overline{\sigma_n}$ le long du cercle de glissement.

M_c : Moment résultant des forces dues à la cohésion par rapport au centre du cercle.

M_Q : moment de Q par rapport au centre du cercle.

M_ϕ : moment résultant des forces tangentielles dues au frottement le long du cercle.

N : résultante des forces normales (milieu homogène ϕ).

N' : " " " (milieu homogène ϕ_1).

N'' : " " " (complémentaire sur l'arc 2ψ).

$N_c = \frac{q}{c}$: milieu $\phi = 0°$ sans surcharge, homogène.

$N_{c1} = \frac{q}{c_1}$: " " " , bicouche.

$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$ pour $c_1 = c_2 = 0$.

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$ pour $c \neq 0$ et $\phi \neq 0°$

N_q : terme de force portante dû à la surcharge.

N_o : résultante des forces normales (milieu bicouche).

N_1 : résultante des forces normales dans la couche supérieure.

N_2 : résultante des forces normales dans la couche inférieure.

Q : force portante limite du sol de fondation

R_c : résultante des forces de cohésions.

R_ϕ : résultante des forces tangentielles dues au frottement (homogène).

$R_{\phi o}, R_{\phi_1}, R_{\phi_2}$: " " " " " (bicouche).

W : poids du segment de cercle

W_1, W_2, W_3, W_4 : poids des tranches du segment de cercle relatives aux couches 1, 2, 3, 4.

X, Y : coordonnées cartésiennes spatiales (B = 1 unité)

Y : verticale ascendante

c : cohésion (sol homogène)

c_1 : cohésion (couche supérieure)

c_2 : cohésion (couche inférieure)

$\ell = r.\sin\theta - \frac{B}{2}$

$m = \frac{c_2}{c_1}$

n : porosité du sol

$q = \frac{Q}{B}$

r : rayon du cercle de glissement

$r' = \frac{r}{B}$

r_c : bras du levier de R_c

r_ϕ : " " " " R_ϕ

r_{ϕ_o} " " " " R_{ϕ_o}

r_{ϕ_1} " " " " R_{ϕ_1}

r_{ϕ_2} " " " " R_{ϕ_2}

$t_1 = \sigma . \sin \phi_1$

$t_2 = \sigma . \sin \phi_2$

β = angle de $\vec{N}$ avec la verticale

γ = poids volumique du sol

γ_d = " " sec

γ_{sat} = " " saturé

$\overline{\gamma}$ = " " immergé

$\gamma' = \frac{\gamma_B}{c}$ cas homogène

$\gamma'_1 = \frac{\gamma_B}{c_1}$)

$\gamma'_2 = \frac{\gamma_B}{c_2}$) bicouche

$\gamma'_d = \frac{\gamma_d . B}{c}$)

Δ' : discriminant réduit d'une équation du 2e degré

ϕ : angle de frottement interne (sol homogène)

ϕ_1 : " " " (couche supérieure)

ϕ_2 : " " " (couche inférieure)

$\phi_o = \phi_1 + \frac{\Psi}{\theta}(\phi_2 - \phi_1)$

$\Psi = \text{Arcos} \left(\cos\theta + \frac{H}{r}\right)$

Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 : mêmes expressions avec H_1, H_2, H_3, respectivement.

$\lambda = r.\sin\phi$ (cas homogène) et $r.\sin\phi_0$ (bicouche).

Ω : $\text{tg}\,\Omega = \frac{t2 - t1}{\sigma_{n2} - \sigma_{n1}}$

σ : contrainte inclinée de ϕ en 1 point du cercle de glissement.

$\sigma_n = \sigma \cos\phi$ (cas homogène) cont. normale

$\sigma_{n1} = \sigma \cos\phi_1$

$\sigma_{n2} = \sigma \cos\phi_2$

θ : demi- ouverture du cercle de glissement

$\tau = \sigma . \sin\phi$: cont. tangentielle en 1 point du cercle.

2.2 INTRODUCTION

2.2.1 Hypothèse d'une ligne de glissement circulaire. Validité de cette hypothèse

Il convient de ne pas dissimuler que le principal intérêt de l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire est la simplicité des calculs qui s'en déduisent.

Or, dans le cas du bicouche le plus général, où le grand nombre des paramètres qui interviennent rend la solution extrêmement complexe, c'est la seule méthode qui, jusqu'à présent, peut donner des résultats utilisables pour l'ingénieur.

Encore faut-il signaler que, par souci de réduire ce grand nombre de paramètres, nous n'avons pas envisagé le cas où il existe une surcharge (fondation légèrement enterrée).

Il semble pourtant que l'hypothèse de la ligne de glissement circulaire soit peu éloignée de la réalité.

Le schéma habituel symétrique de rupture (équilibre limite- plasticité parfaite) ne peut se produire que si l'on maintient verticale la force qui s'exerce sur la base de la fondation, elle même maintenue horizontale. Par contre, si la force est inclinée, TRÂN-VÔ-NHIÊM [113] a montré que la rupture se produit de façon asymétrique et les observations cinématiques faites au paragraphe 3 du chapitre I dans la première partie de la référence précédente, montrent souvent des lignes de glissement assez proches d'arcs de cercles. De même, les essais de TCHENG [106] en milieu homogène (fig. 56-57 de la référence précédente) montrent des lignes de glissement asymétriques et proches d'arcs de cercles lorsque la base de la fondation n'est plus guidée ou n'est plus assujettie à rester horizontale, la force appliquée restant verticale au cours de l'essai.

Les diverses ruptures du sol de fondation observées "in situ" montrent bien une rotation de la fondation.

Le lecteur intéressé par ces questions pourra se reporter aux ouvrages suivants :

LAMBE et WHITMAN [49 , fig. 32-17]

TERZAGHI et PECK [110 , fig. 182]

et surtout à l'ouvrage de LITTLE [55] dont tout le paragraphe 2.07 est consacré aux ruptures de fondations. Les descriptions techniques détaillées de 2 exemples décrits par LITTLE sont données par ALLAIRE [2], et par BJERRUM et OVERLAND [6].

Ces ruptures par rotation de la base de la fondation sont caractéristi-

ques de lignes de ruptures asymétriques, du type de celles décrites par TRÂN-VÔ-NHIÊM et TCHENG.

De même, différents travaux expérimentaux, où la fondation était laissée libre de basculer lors de la rupture, ont montré que les lignes de glissement pouvaient être assimilées à des cercles. Ces travaux ont eu lieu sur un sol homogène: TCHENG [106], JUMIKIS [41], ou bien sur une couche de sol reposant sur une assise rigide : HABIB et ŠUKLJE [33].

2.2.2 Méthode du cercle de glissement

Cette méthode , due à FELLENIUS [25] a déjà été employée par BUTTON [10] dans le cas d'un sol bicouche purement cohérent. En ce qui concerne le cas d'un sol cohérent à frottement interne, la méthode est classique et employée pour calculer la stabilité des talus. Le principe essentiel de cette méthode se retrouve pour le calcul de la force portante d'un sol bicouche. CARIOU et CAZENAVE [14] ont déjà utilisé cette méthode en divisant en tranchesverticales l'intérieur du cercle de glissement.

Enumérons les principales hypothèses d'un tel calcul appliqué aux fondations, lorsqu'on ne divise pas le cercle en tranches

1- Déformation plane. Inerties négligeables .

2- Interface rugueux .

3- Sol isotrope .

4- Sol pesant : poids volumique Constant et unique .

5- Choix d'une répartition des contraintes normales sur le cercle. On assimile la résultante de ces contraintes à une force concentrée. Cette hypothèse a été étudiée par BIAREZ [3] et [4]. Elle est dans le sens de la sécurité. D'autres répartitions ont été proposées par BIAREZ [3], FRÖLICH [26] , TAYLOR [103] et [104] , CAQUOT [11] . (voir § 2.3.2)

6- Choix d'un angle de frottement ϕ_0 remplaçant le milieu bicouche par un milieu homogène équivalent (voir § 2.4.3) Cette hypothèse est dans le sens de la sécurité.

7- Choix d'un cercle donnant la force protante minimale, grâce à l'emploi de l'ordinateur.

2.2.3 Résumé de la méthode

On écrit l'équilibre des forces et des moments qui agissent sur le cercle de glissement présumé. On résoud les 3 équations de l'équilibre en utilisant les hypothèses N° 5 et N°6. On effectue un grand nombre de fois ce calcul à l'ordinateur pour différentes positions du centre du cercle, chacun d'entre eux passant par le bord extérieur de la fondation.

On choisit comme force portante d'un sol bicouche le résultat le plus faible trouvé pour tous les cercles analysés.

2.2.4 Remarque : nature des paramètres mécaniques du sol, c et ϕ (ou c_1, ϕ_1, c_2, ϕ_2) et γ - Pour ce qui est du paragraphe 2.10 (existence d'une nappe), c et ϕ étant ici constants dans tout le massif, il ne peut s'agir que de la force portante à long terme et les paramètres à utiliser sont c' et ϕ'. En effet pour calculer la force portante à court terme, il faudrait employer c' et ϕ' au dessus de la nappe et c_u et $\phi = o°$ au dessous.

- En ce qui concerne le bicouche, nous avons fait l'hypothèse d'un seul poids volumique dans tout le massif. Aussi 2 cas se présentent :

a) La nappe n'existe pas, ou bien est trop profonde pour que sa présence influe sur la force portante.

- Le sol est sec : on utilisera les paramètres effectifs c', ϕ', et γ_d.
- Le sol est saturé : on utilisera c_u, $\phi = 0°$ et γ_{sat} pour la force portante à court terme, et c', ϕ' et γ_d pour la force portante à long terme.

b) La nappe est au niveau du sol. Les paramètres à utiliser sont :

Force portante à court terme : c_u, $\phi = 0°$, γ_{sat}.

Force portante à long terme : c', ϕ', $\overline{\gamma}$.

2.3 DESCRIPTION DE LA METHODE DE CALCUL, CAS DU MILIEU HOMOGENE PESANT

2. 3. 1 Principe du calcul

Soit une fondation reposant sur un milieu homogène de poids volumique γ, de cohésion c, d'angle de frottement interne ϕ. Nous employons ici la méthode utilisée pour la stabilité des talus dont nous avons parlé au § 2.2 :

Nous supposons que le seuil d'écoulement plastique est atteint tout le long d'une ligne de glissement supposée circulaire, de rayon r et d'ouverture angulaire 2θ. Le long de cette ligne ACB (figure 2-1) nous pouvons écrire, en un point M quelconque (fig. 2-2) : $\tau = c + \sigma_n \cot g \phi$

où τ est la contrainte tangentielle et σ_n la contrainte normale.

Les diverses forces qui entrent en jeu sont :

$\vec{Q}$: la force portante limite du sol de fondation à la rupture

$\vec{W}$: Le poids du segment de cercle AFBCA

$\vec{N}$: La résultante des forces normales le long de l'arc $\overset{\frown}{ACB}$ (fig. 2-1)

$\vec{R}_c$: La résultante des forces tangentielles dues à la cohésion le long de l'arc $\overset{\frown}{ACB}$ (fig. 2-1)

R_ϕ : La résultante des forces tangentielles dues au frottement interne, le long de $\overset{\frown}{ACB}$.

Les divers moments en O qui agissent sur le segment de cercle AFBCA sont:

M_Q : moment de la force Q

M_c : moment de la force R_c

M_ϕ : moment de la force R_ϕ

Nous qualifierons le premier de "moteur" et les 2 suivants de "résistants"

L'équilibre des forces et des moments nous fournit 3 équations scalaires:

$$M_Q + M_c + M_\phi = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

$$\vec{Q} + \vec{W} + \vec{N} + \vec{R_c} + \vec{R_\phi} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

Avec

$M_Q = \left(r.\sin\theta - \frac{B}{2}\right).Q$

$M_c = \int_0^{2\theta} r.\, c\, r\, d\theta = 2\theta c r^2$

$M_\phi = \vec{R}_\phi . r_\phi = N.tg\phi . r_\phi$ (voir fig. 2-1)

$Q = qb$

$W = \gamma.r^2.(\theta - \cos\theta.\sin\theta)$

$R_c = 2\,c.r.\sin\theta$

$R_\phi = N.tg\phi$

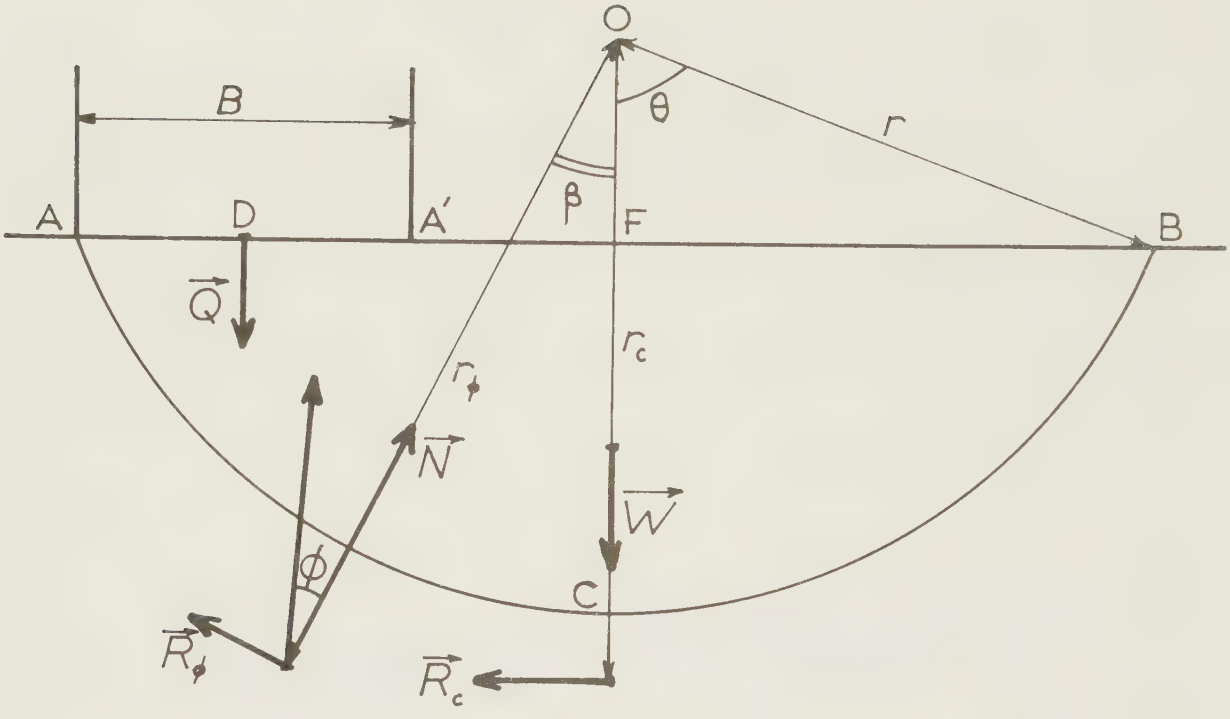


figure 2-1

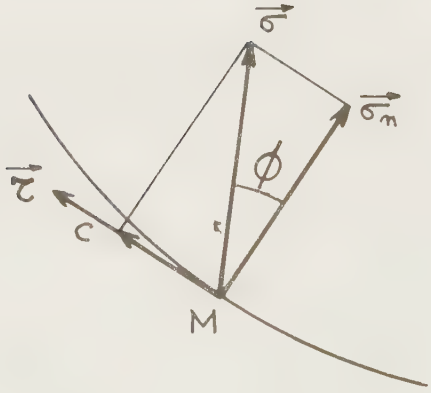


figure 2-2

Il y a donc 4 inconnues scalaires : $Q, \vec{N}$ et r_ϕ.

Pour trouver une équation supplémentaire, nous sommes obligé de faire une hypothèse simplificatrice supplémentaire.

Remarque : Dans les calculs de stabilité de talus, Q n'apparait pas. L'inconnue qui le remplace est le coefficient de sécurité.

2.3.2 Hypothèse supplémentaire :

$M_\phi = N.tg\,\phi.r_\phi = r.\int_0^{2\theta} \sigma_n.tg\phi.r\,d\theta$

$M_\phi = r.tg\phi.L$ avec $L = \int_0^{2\theta} \sigma_n.r\,d\theta$

L est donc la longueur du funiculaire des forces normales $\sigma_n.r\,d\theta$ (fig. 2-3)
L est tangent, en son origine et son extrémité, à des droites parallèles respectivement à OA et OB.

L'hypothèse simplificatrice consiste à remplacer L par son minimum N et à écrire que $M_\phi = r.N.tg\phi$. Ce qui revient à dire que le moment de toutes les forces tangentielles dues au frottement interne peut être remplacé par le moment d'une force unique $N.tg\phi$, placée sur le cercle.

Cette hypothèse, dont on sait qu'elle donne le facteur de sécurité minimal pour la stabilité d'un talus, est-elle ici dans le sens de la sécurité ?
(voir BIAREZ [4])

OUI car :

On sait que $L > N$

ou encore que $r_\phi > r$

Cela entraîne que M_ϕ calculé est inférieur à M_ϕ réel, donc qu'en valeur absolue M_Q calculé $< M_Q$ réel.

donc Q calculé $<$ Q réel.

Le polygone des forces est représenté sur la figure (2-4)

Le problème est ramené à la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues $\vec{N}$ et Q ou encore N, β et Q.

Remarque : D'après BIAREZ [4] et LAMB et WHITMAN [49] , il est prouvé que l'hypothèse que nous venons d'étudier est de peu dans le sens de la sécurité. En ce qui concerne les talus, cela se traduit en disant que le minorant calculé du coefficient de sécurité est proche du coefficient de sécurité "vrai". Ici, de même, nous pouvons dire que le minorant calculé de la force portante limite est proche de la force portante limite "vraie".

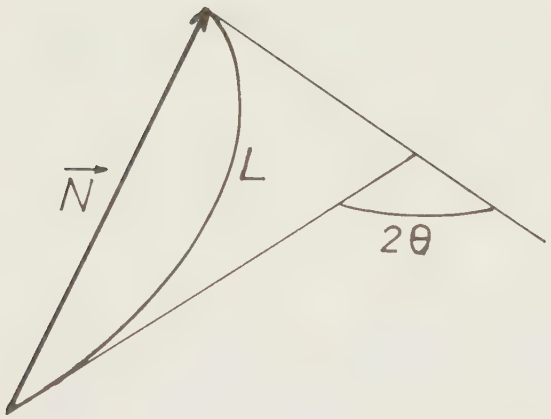


fig. 2-3

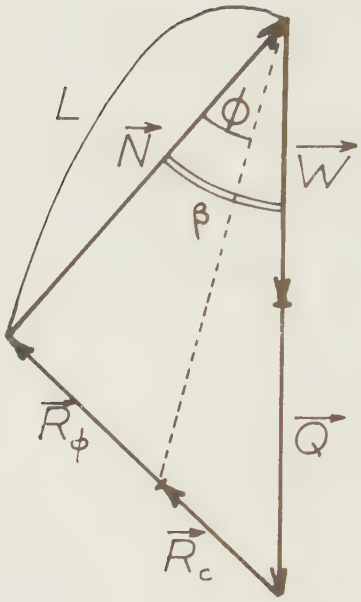


fig. 2-4

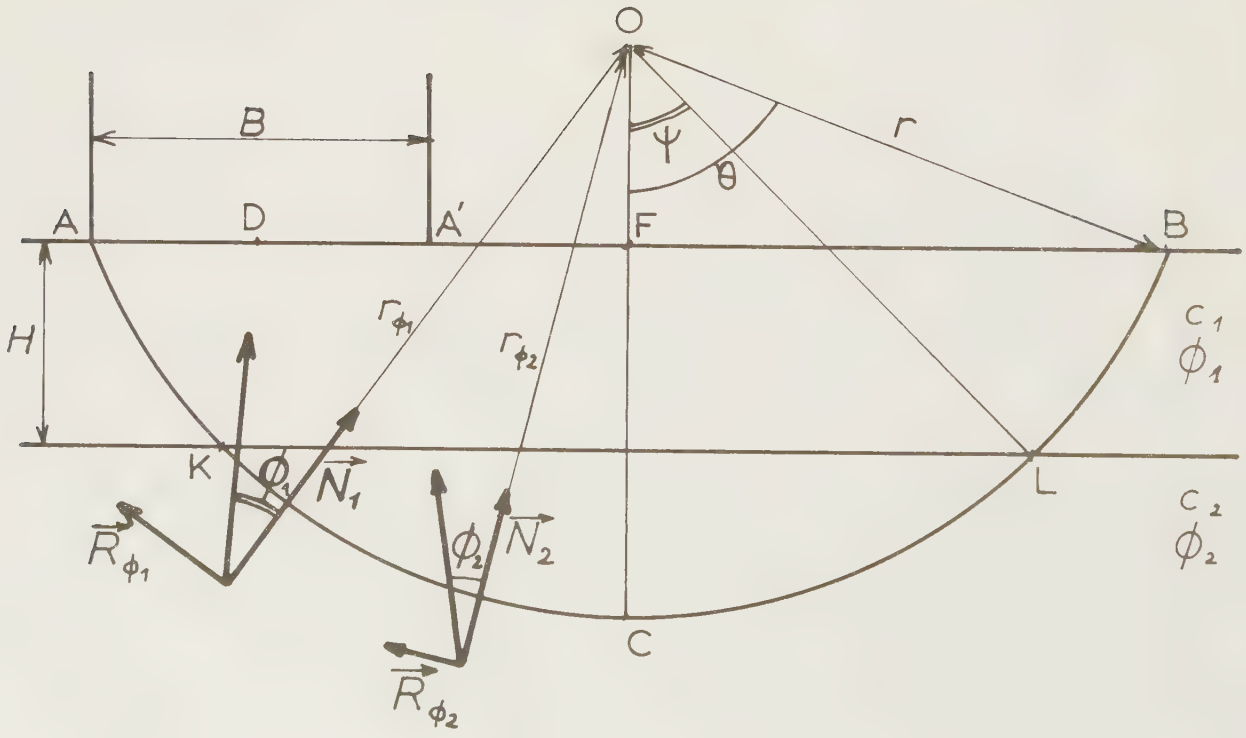


fig. 2-5

2.3.3 Résolution du problème

L'équation (2-1) devient :

$$Q\left(r.\sin\theta - \frac{B}{2}\right) = 2\theta.cr2 + N.r.tg\,\phi \qquad (2\text{-}3)$$

Les projections de l'équation (2-2) sur les directions horizontale et verticale donnent respectivement

$$R_c = N\left(\sin\beta - tg\,\phi.\cos\beta\right)$$

soit $R_C = \frac{N}{\cos\phi}\left[\sin(\beta-\phi)\right]$ (2-4)

et $Q + W = R_\phi.\sin\beta + N.\cos\beta = N\,(tg\,\phi.\sin\beta + \cos\beta)$

soit $Q + W = \frac{N}{\cos_\phi}\cdot\cos(\beta-\phi)$ (2-5)

On élimine $(\beta-\phi)$ entre les équations (2-4) et (2-5)

$$(Q+W)^2 + R_c^2 = \frac{N^2}{\cos^2\phi} \qquad (2\text{-}6)$$

On élève l'équation (2-3) au carré :

$$\frac{N^2r^2}{\cos^2\phi}.\sin^2\phi = (M_Q - M_c)^2 \qquad (2\text{-}7)$$

On élimine $\frac{N}{\cos\phi}$ entre les équations (2-6) et (2-7)

$$\left[(Q+W)^2 + R_c^2\right].r^2.\sin^2\phi = (M_Q - M_c)^2 \qquad (2\text{-}8)$$

En posant $\lambda = r.\sin\phi$

$\ell = \overline{DF} = r.\sin\theta - \frac{B}{2}$ (fig. 2-1)

L'équation (2-8) se transforme en une équation du second degré en Q.

$$Q^2(\lambda^2 - \ell^2) + 2Q(\lambda^2 W + \ell M_c) + R_c^2\lambda^2 - M_c^2 + \lambda^2W^2 = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

En introduisant les variables adimensionnelles

$$r' = \frac{r}{B}\ ,\ \gamma' = \frac{\gamma B}{c}\text{, puis : } q = \frac{Q}{B}$$

l'équation (2-9) prend la forme :

$$A_1\left[\frac{q}{c}\right]^2 + 2B_1\left[\frac{q}{c}\right] + C_1 = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

avec

$A_1 = r'^2.\sin^2\phi - r'^2\sin^2\theta + r'\sin\theta - \frac{1}{4}$

$B_1 = \gamma'.r'^4.\sin^2\phi\left(\theta - \cos\theta.\sin\theta\right) + 2r'^4\theta\left(r'\sin\theta - \frac{1}{2}\right)$

$C_1 = 4.r'^4.\sin^2\phi.\sin^2\theta - 4.r'^4.\theta^2 + r'^6.\gamma'^2\sin^2\phi\,(\theta - \cos\theta.\sin\theta)^2$

Dans le cas particulier où $\phi = 0°$ il vient $(\ell Q - M_c)^2 = 0$ qui est l'équation obtenue par BUTTON [10] dans le cas purement cohérent.

L'équation (2-10) peut prendre une forme un peu différente, en prenant $\frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$ comme inconnue, au lieu de $\frac{q}{c}$. On verra par la suite (§2-5) que cette forme est la plus pratique pour la présentation des résultats.

$$A_1'\left[\frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}\right]^2 + 2B_1'\left[\frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}\right] + C_1' = 0 \qquad (2\text{-}11)$$

avec :

$$A'_1 = r'^2_{\cdot} \sin^2\phi - r'^2_{\cdot} \sin^2\theta + r'_{\cdot} \sin\theta - \frac{1}{4}$$

$$B'_1 = 2 r'^4_{\cdot} \sin^2\phi \left(\theta - \cos\theta . \sin\theta\right) - \frac{4 r'^2_{\cdot} \theta}{\gamma'^2} \left(r'_{\cdot} \sin\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$C'_1 = 16 \frac{r'^4}{\gamma'^2} . \sin^2\phi . \sin^2\theta - \frac{16 r'^4_{\cdot} \theta^2}{\gamma'^2} + 4 r'^6_{\cdot} \sin^2\phi \left(\theta - \cos\theta . \sin\theta\right)^2$$

La résolution de l'équation (2-10) ou de l'équation (2-11) nous donne des termes de force portante qui sont des fonctions de r et de θ, paramètres caractérisant la position du centre du cercle de glissement. Nous prendrons pour ligne de glissement le cercle qui correspond à la valeur minimale de la force portante.

Remarque : Le lieu des centres des cercles sera étudié dans le cas d'un milieu bicouche (voir § 2-4-8).

2.4 PRINCIPE DU CALCUL EN MILIEU BICOUCHE LE PLUS GENERAL (pesant, c_1, ϕ_1, c_2, ϕ_2)

Nous examinons maintenant le cas du milieu bicouche sans nous attarder sur le calcul proprement dit, tout à fait analogue au précédent et que le lecteur pourra trouver en Annexe I. Par contre nous détaillerons tout ce qui, dans ce calcul, diffère du précédent, du fait de l'existence de deux couches différentes de sol.

Nous discuterons la validité des hypothèses simplificatrices retenues et nous traiterons finalement de la résolution pratique des équations.

2.4.1 Présentation du problème.

Sur la figure (2-5) sont reprises les principales notations. On remarquera que les deux couches sont supposées avoir le même poids volumique γ, l'introduction de deux poids volumiques apportant des complications inextricables dans la présentation des résultats. Les équations d'équilibre sont les mêmes qu'au § 2-3 . [équations (2-1) et (2-2)]. Mais les expressions de M_c, M_ϕ , N, R_c et R_ϕ vont changer. Nous examinerons successivement comment nous avons pris en compte l'existence de 2 cohésions, puis de 2 angles de frottement interne le long de l'arc $\widehat{ACB}$.

2.4.2 Existence de deux cohésions

Nous avons repris ici la méthode de BUTTON [10] qui consiste à supposer l'existence d'une cohésion c_1 de A à B et d'une cohésion $(m-1)\,c_1$ le long de l'arc $\widehat{KL}$ d'ouverture 2Ψ . (fig. 2-5). On aboutit alors aux expressions suivantes :

$M_c = 2\theta c_1 . r^2 + 2 r^2 (m-1) c_1 . \Psi$

$R_c = 2 \sin\theta . c_1 . r + 2r(m-1) . c_1 . \sin\Psi$

Avec : $\Psi = \text{Arcos}\,(\cos\theta + \frac{H}{r})$

2.4.3 Existence de 2 angles de frottement interne

Le nombre d'équations est toujours égal à 3.

Le nombre d'inconnues est porté à 7 :

$Q, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}, r_{\phi_1}, r_{\phi_2}$

Pour réduire le nombre d'inconnues, on peut avoir l'idée d'exploiter la méthode que BUTTON a employée avec la cohésion.

A savoir : Un angle de frottement ϕ_1 sur l'arc d'ouverture 2θ et un angle de frottement Ω sur l'arc d'ouverture 2Ψ . Avec $\Omega \gtrless 0°$.

Examinons les figures (2-6)

Dans le cas (b) nous avons remplacé le bicouche ϕ_1, ϕ_2 par un milieu homogène ϕ_1, toutes choses restant égales par ailleurs.

Si l'orientation de la contrainte en un point du cercle M change, on peut penser que son module ne change pas : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\sigma_{n1} = \sigma . \cos\phi_1$$
$$\sigma_{n2} = \sigma . \cos\phi_2$$
$$\tau_1 = \sigma . \sin\phi_1$$
$$\tau_2 = \sigma . \sin\phi_2$$

Sur la figure (2-7) on voit que :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\sigma_{n2} - \sigma_{n1}} = \frac{\sin\phi_2 - \sin\phi_1}{\cos\phi_2 - \cos\phi_1} \qquad \text{toujours} < 0$$

On pose $\operatorname{tg}\Omega = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sigma_{n2} - \sigma_{n1}}$

Les moments dûs au frottement interne sont $M_{\phi 1} = r . \operatorname{tg}\phi_1 . N'$ sur tout l'arc d'ouverture 2θ. $M_{\Omega} = r . \operatorname{tg}\Omega . N''$ sur l'arc d'ouverture 2Ψ.

Après des simplifications identiques à celle du paragraphe 2.3.2, il reste 5 inconnues : Q, $\vec{N_1}$, $\vec{N'}$.

Nous avons donc été amené à imaginer une autre hypothèse susceptible de ramener de 7 à 3 le nombre d'inconnues.

Il faut chercher un angle de frottement interne unique ϕ_0, équivalent, le long du même arc $\overset{\frown}{ACB}$, aux angles de frottement interne conjugués : ϕ_1 le long de $\overset{\frown}{AK}$ et $\overset{\frown}{LB}$ et ϕ_2 le long de $\overset{\frown}{KL}$.

Il s'agit donc de déterminer :

$$\phi_0 = f(\phi_1, \phi_2, H, B, \theta, r)$$

Nous avons préféré, [voir fig. (2-8)], la relative linéaire :

$$\phi_0 = \phi_1 + \frac{\Psi}{\theta}(\phi_2 - \phi_1) \qquad (2\text{-}12)$$

à $\operatorname{tg}\phi_0 = \operatorname{tg}\phi_1 + \frac{\Psi}{\theta}(\operatorname{tg}\phi_2 - \operatorname{tg}\phi_1)$

En effet l'interpolation linéaire semble logique, car l'importance respective de ϕ_1 et ϕ_2 est fonction de la longueur des arcs sur lesquels ils se manifestent. En Annexe I, les conséquences de cette hypothèse sont examinées plus en détail :

On montre que cette hypothèse, associée à l'hypothèse habituelle du § 2.3.2, est dans le sens de la sécurité. On examine également quelques cas limites .

On aboutit ainsi à :

$$M_\phi = r . \operatorname{tg}\phi_0 . N_0$$
$$R_\phi = N_0 . \operatorname{tg}\phi_0$$

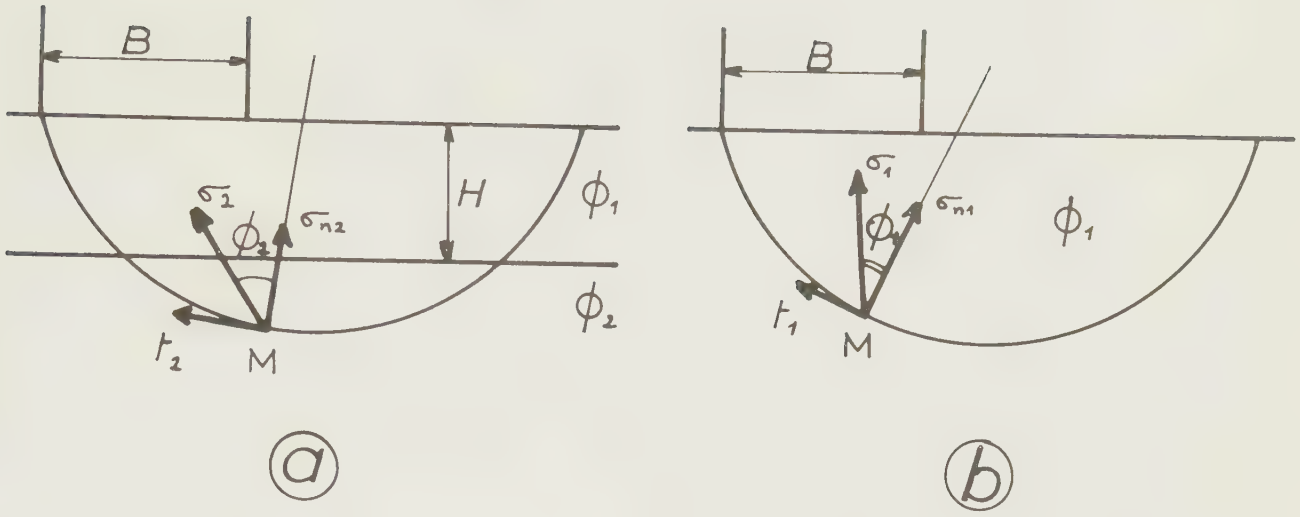


fig. 2-6

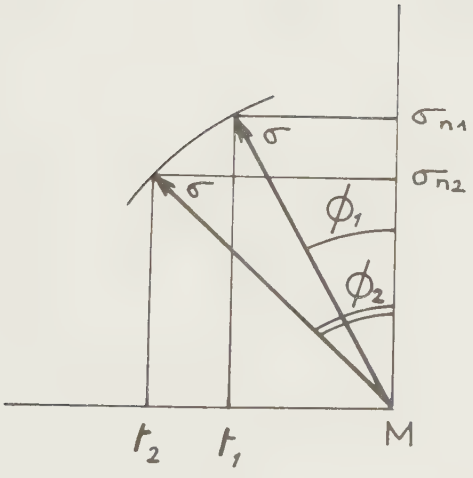


fig. 2-7

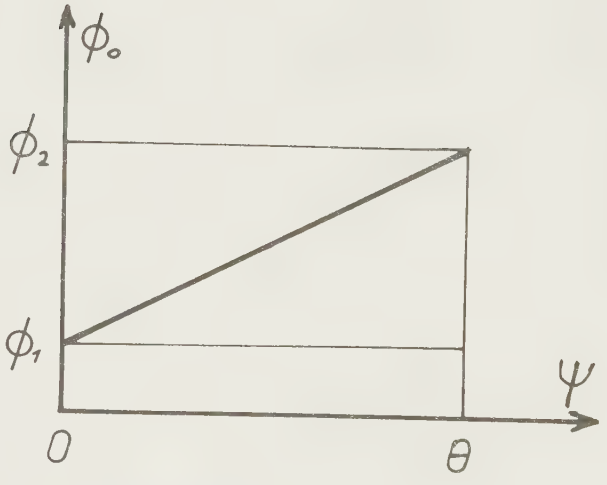


fig. 2-8

2.4.4 Cas général $C_1 \neq 0$

La résolution est alors analogue à celle du § 2.3.3.

On pose $r' = \frac{r}{B}$, $\gamma'_1 = \frac{\gamma B}{c_1}$, $q = \frac{Q}{B}$

Il vient alors (voir Annexe I)

$$A_2 \left[\frac{q}{c_1}\right]^2 + 2B_2 \left[\frac{q}{c_1}\right] + C_2 = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

Si l'on pose :

$$\frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B} = N_{c\gamma}$$

Il vient

$$A'_2 N_{c\gamma}^2 + 2B'_2 N_{c\gamma} + C'_2 = 0 \qquad (2\text{-}14)$$

2.4.5 Cas où la couche supérieure est pulvérulente ($c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$)

Il vient

$$A_3 \left[\frac{q}{c_2}\right]^2 + 2B_3 \left[\frac{q}{c_2}\right] + C_3 = 0 \qquad (2\text{-}15)$$

ou encore

$$A'_3 N_{c\gamma}^2 + 2B'_3 N_{c\gamma} + C'_3 = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

2.4.6 Cas du bicouche pulvérulent ($C_1 = C_2 = 0$)

Il vient $Q = \frac{\lambda . W}{\ell - \lambda}$ et en posant $N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B} = \frac{Q}{\frac{1}{2}\gamma B^2}$

Il vient :

$$N_\gamma = \frac{2r'^3 \sin\phi_0 (\theta - \cos\theta . \sin\theta)}{r' \sin\theta - \frac{1}{2} + r' \sin\phi_0} \qquad (2\text{-}17)$$

Les détails des calculs, ainsi que les valeurs de :

A_2, A'_2, A_3, A'_3, B_2, B'_2, B_3, B'_3, C_2, C'_2, C_3, C'_3

sont donnés en Annexe I.

2.4.7 Discussion

Il nous faudrait maintenant, en toute logique, faire l'étude du nombre et du signe des racines réelles des équations (2-13) et (2-15), [ou (2-14) et (2-16) ce qui est équivalent].

Cette étude est possible mais extrêmement fastidieuse. Le lecteur trouvera, en Annexe I, démontré que le discriminant réduit de ces équations

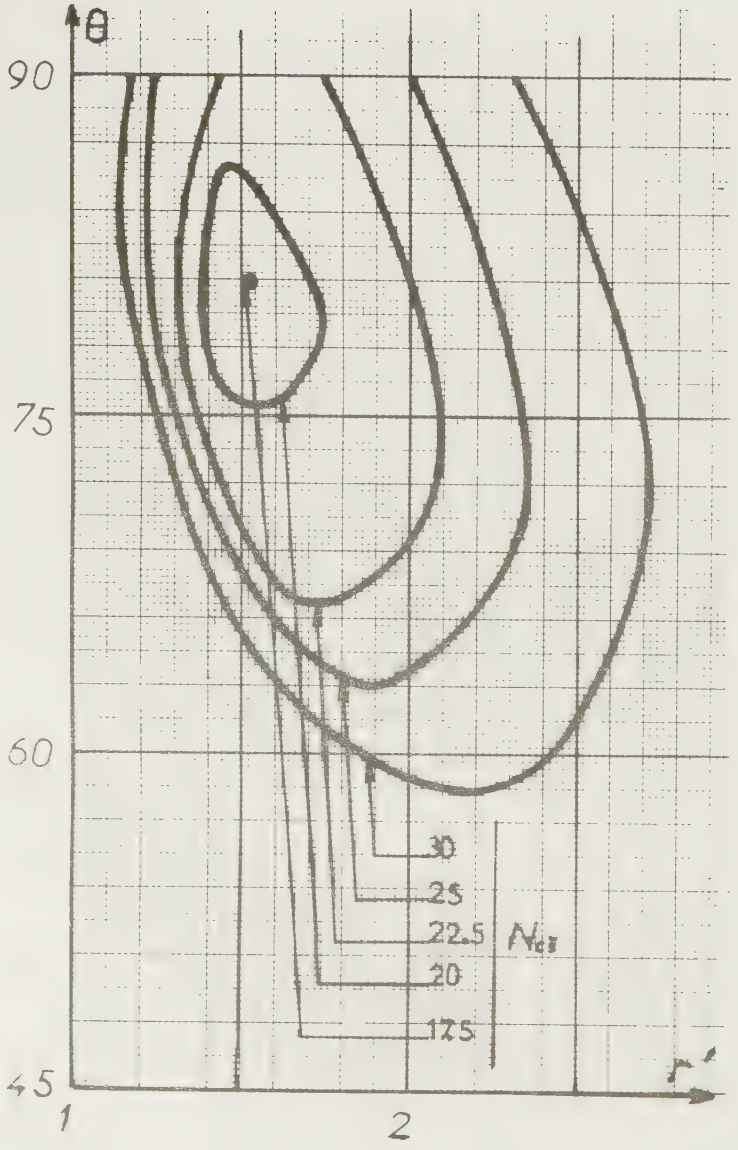


fig. 2-9

fig. 2-9 et 2-10 :

$c_1 \neq 0$ $\quad c_2 = 0$

$\phi_1 = \phi_2 = 30°$

$\gamma'_1 = 20$ $\quad H = 0$

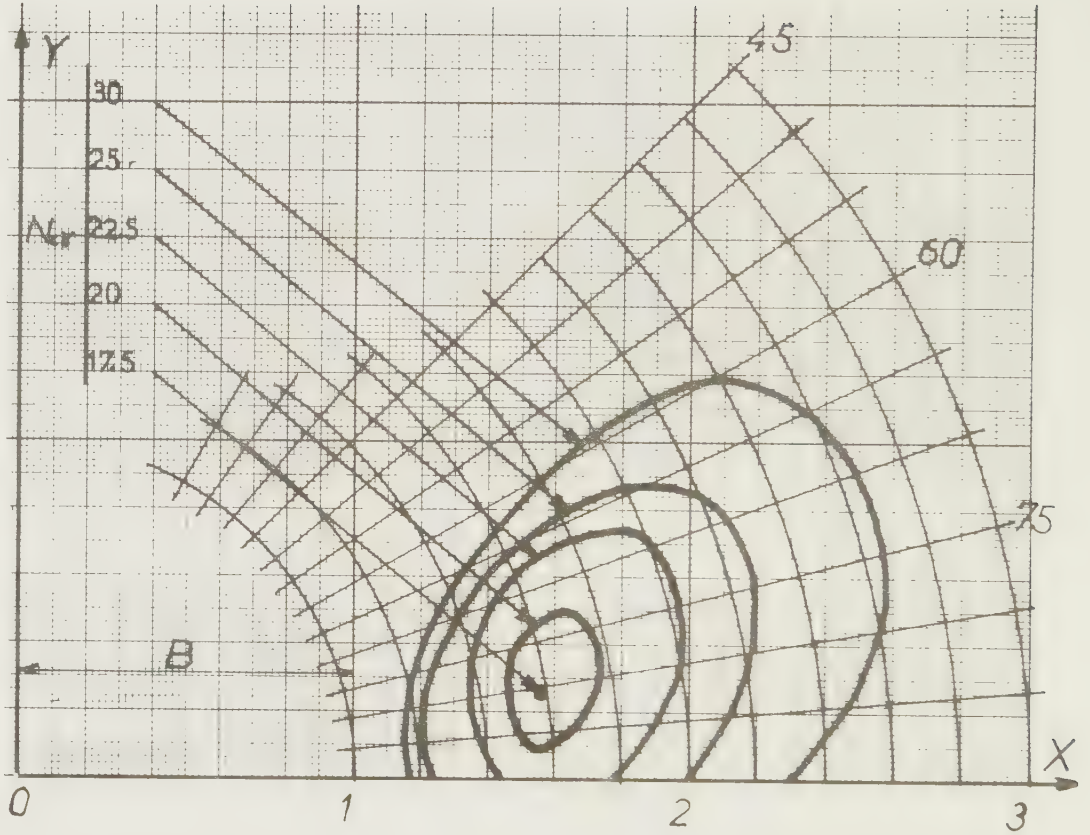


fig. 2-10

est toujours positif, à condition que : $r' \sin\theta > \frac{1}{2}$

ce qui correspond au fait que l'extrêmité B du cercle doit se trouver au delà du bord A' de la fondation, ou encore $AB > AA'$ (fig. 2-5)

Pratiquement, l'ordinateur nous a permis, très rapidement, de vérifier que les équations du second degré en question avaient toujours au moins une racine positive.

En prenant un cas particulier (par exemple celui du § 2.4.6.), et puisque tous les paramètres du problème varient continûment, il devient clair que la racine qui seule est la solution du problème qui nous intéresse, est celle qui s'écrit

$$\frac{-B_i - \sqrt{\Delta'_i}}{2A_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

2.4.8 Recherche du cercle correspondant à la valeur minimale de la force portante.

Nous faisons varier r' et θ entre des limites variables selon les cas.

Un cas courant est celui où r' varie de 0.6 à 3 et θ de 30° à 90°.

La valeur de l'incrément est 0.1 pour r', et 3° pour θ. Ce qui nous donne des résultats comportant au moins 3 chiffres significatifs exacts.

Les figures (2-9) et (2-10) illustrent dans les coordonnées (r', θ) cartésiennes et polaires, la recherche du minimum de la force portante pour

$c_1 \neq 0$, $\phi_1 = \phi_2 = 30°$, $\gamma'_1 = 20$, $H = 0$, $\frac{c_2}{c_1} = 0$ On y a tracé les équi - $N_{c\gamma}$, pour 20 , 22.5 , 25 et 30

Un autre résultat intéressant est de chercher comment varie la position du centre du cercle donnant la force portante minimale.

La figure (2-11) nous montre cette variation quand H augmente pour :

$c_1 = c_2 = 0$, $\phi_1 = 10°$, $\phi_2 = 40°$

et pour : $c_1 = c_2 = 0$, $\phi_1 = 40°$, $\phi_1 = 10°$

La figure (2-12) nous montre la même variation

pour : $\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 = 20° \\ \gamma'_1 = 20 \end{cases}$ avec $\frac{c_2}{c_1} = 0$, 10 et 1

Enfin, il nous a paru intéressant de tracer sur la figure (2-13) cette même variation pour $\gamma'_1 = 20$, $\frac{c_2}{c_1} = 1$ et pour ϕ_1 et ϕ_2 variables mais cette fois-ci avec H constant et égal à $\frac{B}{2}$.

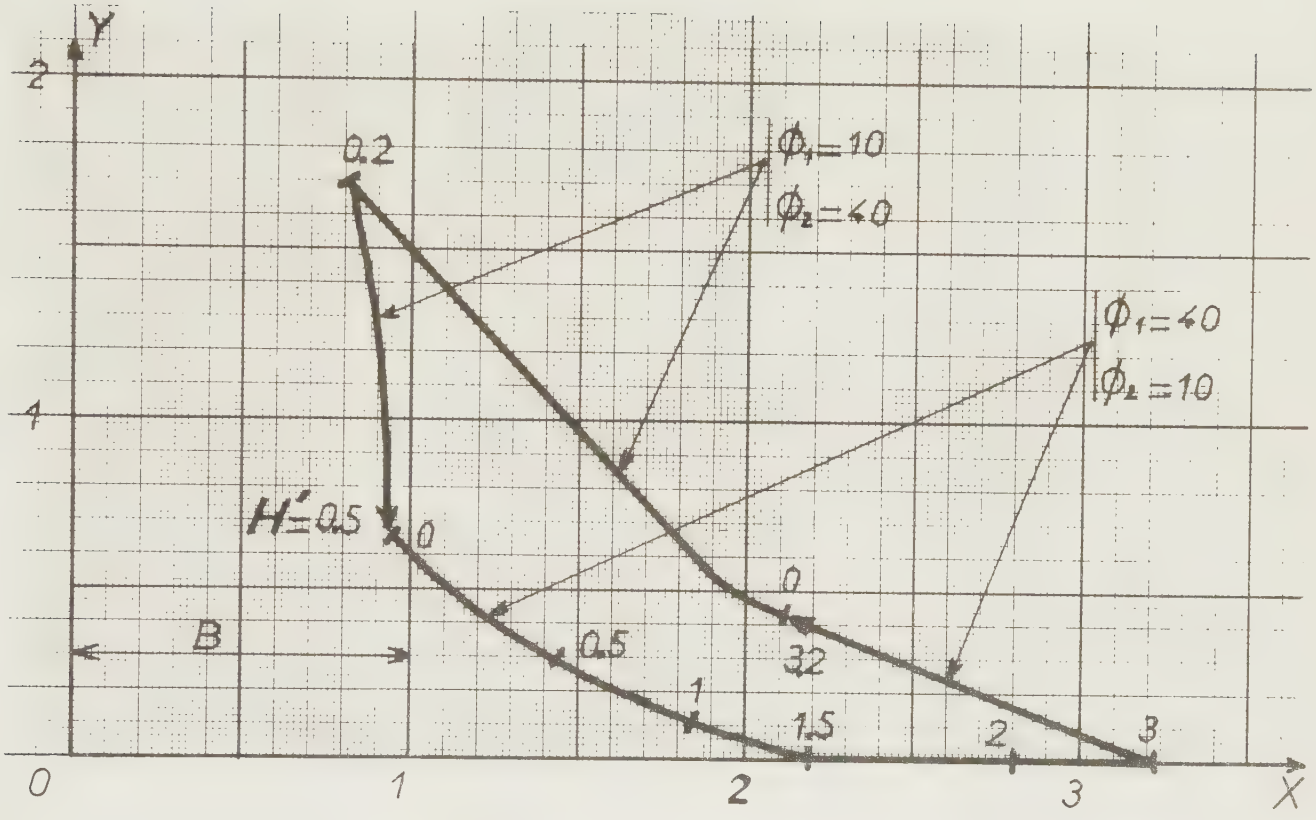


fig. 2-11

lieu des centres des cercles

$C_1 = C_2 = 0$

$\gamma'_1 = 20$

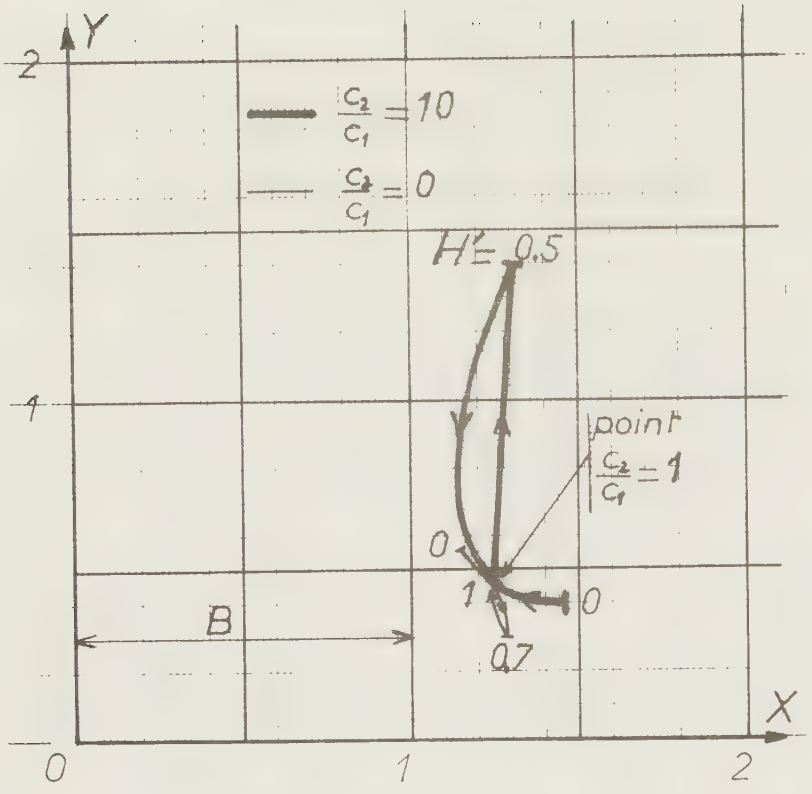


Fig. 2-12

lieu des centres des cercles:

$\phi_1 = \phi_2 = 20°$

$\gamma'_1 = 20$

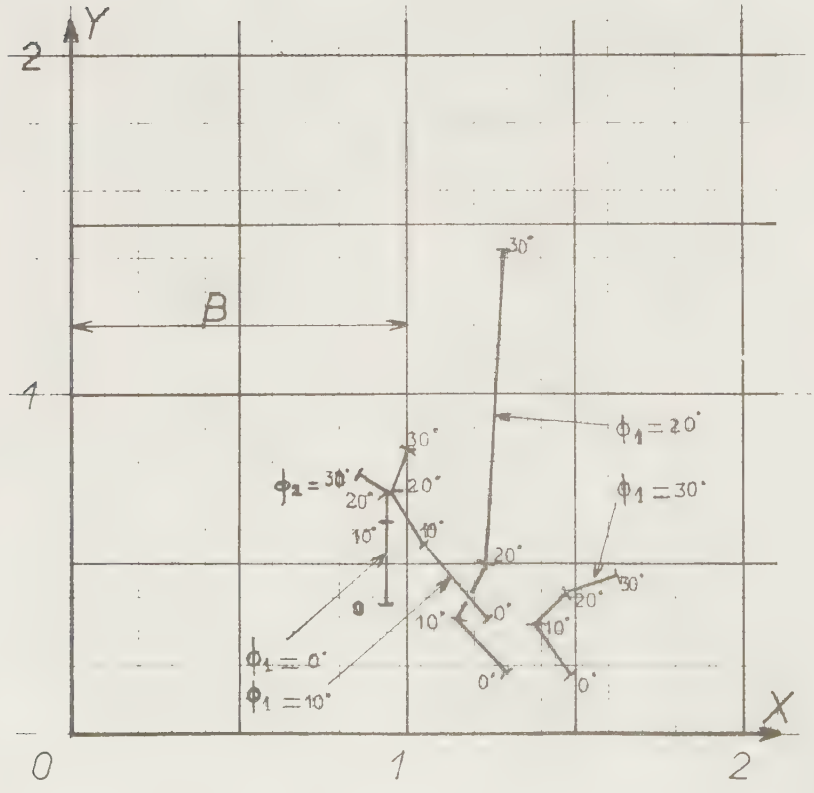


Fig. 2-13

lieu des centres des cercles:

m = 1

γ'_1 = 20

H' = 0.5

Les lieux géométriques ainsi tracés ne sont pas des courbes simples. Cette étude nous a permis toutefois de constater que pour certaines valeurs des paramètres ce lieu admet une importante discontinuité. Ce qui prouve que la fonction N_c admet alors 2 minima dont l'un augmente tandis que l'autre diminue, et dont les valeurs deviennent égales au moment où l'un observe la discontinuité.

2.5 PRESENTATION DES RESULTATS

Il est sans doute plus intéressant de se servir des équations (2-14) et (2-16) plutôt que (2-13) et (2-15).

En effet, dans tous les cas, la capacité portante du sol s'exprime au moyen de la grandeur adimensionnelle $\frac{Q}{\frac{1}{2} B^2 . \gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2} B . \gamma}$

Dans le cas où il existe de la cohésion dans au moins une couche, nous appellerons cette grandeur $N_{c\gamma}$ par analogie avec la formule de Terzaghi. En effet, $N_{c\gamma}$ prend en compte à la fois les termes N_c et N_γ, (dits "de cohésion" et "de surface") mais pour une surcharge nulle (fondation non enterrée)

Dans le cas où $c_1 = c_2 = 0$, $\frac{Q}{\frac{1}{2}\gamma B^2} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$ est tout bonnement le coefficient N_γ de la formule de TERZAGHI [109] .

2.5.1 Cas où $c_1 \neq 0$ Dans ce cas $N_{c\gamma} = f\left(\frac{H}{B}, \frac{c_2}{c_1}, \phi_2, \phi_1, \gamma_1'\right)$: 5 paramètres adimensionnels.

Il nous a paru pratique de faire figurer les variation de N_c en fonction de $\frac{H}{B}$ en groupant dans un même abaque des courbes tracées pour des valeurs de ϕ_1 allant de 0° à 30° . Dans un même abaque les paramètres $\frac{c_1}{c_2}$, ϕ_2 et $\gamma_1' = \frac{\gamma B}{c_1}$ sont constants.

En pratique nous avons gardé $\gamma_1' = 20$ qui est une valeur moyenne, puisque γ_1' peut varier de 0.1 à l'infini.

Il faudrait compléter par $\gamma_1' = 2$ comme sur l'abaque N° 26 (Annexe II)

Nous avons donné à $m = \frac{c_2}{c_1}$ les valeurs 0, 0.5, 1, 2, 5, 10, ∞, tandis que ϕ_2 prenait les valeurs 0°, 10°, 20°, 30°. (un sol cohérent ayant peu souvent un angle de frottement interne supérieur à 30°) Cela représente les 26 abaques N° 2 à 27 de l'Annexe II.

2.5.2 Cas où $c_2 \neq 0$ et $c_1 = 0$.

Dans ce cas $N_{c\gamma} = f\left(\frac{H}{B}, \phi_2, \phi_1, \gamma_2'\right)$: 4 paramètres adimensionnels. Si une courbe représente toujours les variations de $N_{c\gamma}$ en fonction de $\frac{H}{B}$, les courbes sont maintenant groupées dans un abaque pour des valeurs de ϕ_1 allant de 10° à 40°. Chacun de ces abaques est à ϕ_2 et $\gamma_2' = \frac{\gamma B}{c_2}$ constants.

En pratique nous avons donné 2 valeurs à γ_2' : 2 et 20 (γ_2' peut, en fait, varier de 0 à l'∞.), et 4 valeurs à ϕ_2 : 0°, 10°, 20°, 30°.

Soit les 5 abaques N° 28 à N° 32

2.5.3 Cas où $c_1 = c_2 = 0$

Dans ce cas $N_\gamma = f\left(\frac{H}{B}, \phi, \phi_2\right)$: 3 paramètres adimensionnels.

Nous avons des abaques identiques à ceux du cas précédent mais chaque abaque est donné maintenant pour une valeur de ϕ_2 simplement. Soit les 5 abaques (pour $\phi_2 = 10°, 20°, 30°, 40°$) N°33 à N°37.

2.5.4 Cas où $\phi_1 = \phi_2 = 0$

En théorie ce cas a été traité au paragraphe 2.5.1. Il faut donc signaler qu'alors, si $N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$ varie bien avec γ'_1 (c'est à dire avec γ) il n'en est rien pour $N_{c_1} = \frac{q}{c_1}$, qui ne dépend pas de γ'_1.

Il est donc plus intéressant de porter ici N_c en fonction de H'. C'est ce que nous avons fait sur l'abaque N°1. Nous trouvons des valeurs très proches de celles déjà proposées par BUTTON. (voir chapitre V).

2.5.5 Cas d'une assise rocheuse

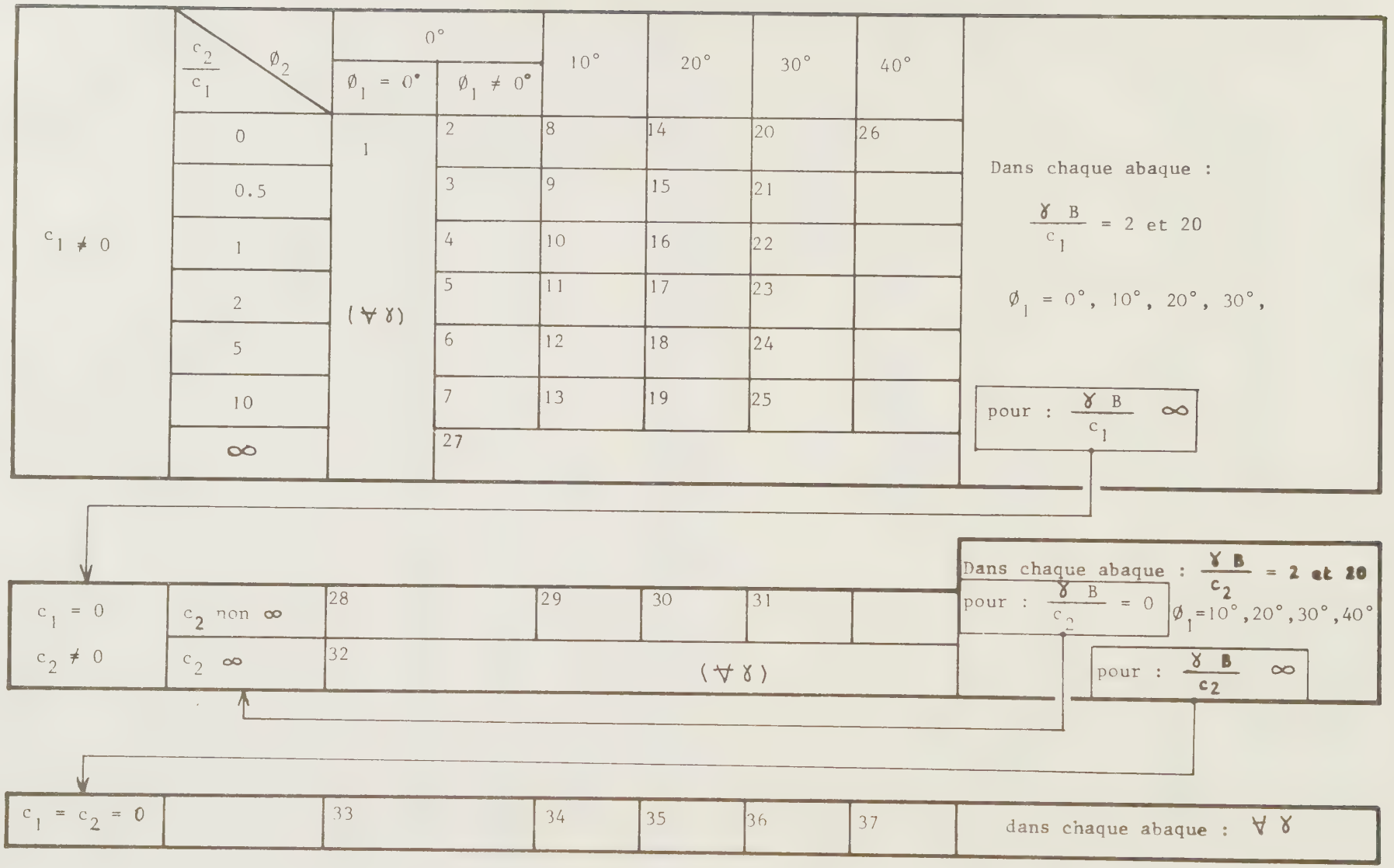
Le cas d'un bicouche composé d'une couche de sol reposant sur un substratum rocheux se déduit, comme un cas particulier, des calculs précédents. Il figure donc dans les abaques en 2 endroits:

l'abaque N°27 pour $c_1 \neq 0$

l'abaque N°32 pour un sable ($c_1 = 0$)

On remarque qu'alors, dans ce 2e cas, $\frac{1}{\gamma'_2} = 0$ et γ n'intervient plus dans les coefficients de l'équation (2-16). Les résultats sont donc valables $\forall \gamma$.

2.5.6 En résumé et pour rendre plus pratique l'usage des abaques, on pourra se servir du tableau ci-après, qui indique le numéro des abaques correspondant aux différents cas traités. On pourra se reporter aussi à l'Annexe I pour trouver quelques abaques en coordonnées métriques et non plus semi-logarithmiques. Le tableau suivant se retrouve en tête de l'Annexe II, pour plus de commodité.


$c_1 \neq 0$
$\frac{c_2}{c_1}$ ϕ_2
0°
$\phi_1 = 0°$
$\phi_1 \neq 0°$
10°
20°
30°
40°
0
0.5
1
2
5
10
∞
1
(∀ γ)
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
Dans chaque abaque :
$\frac{\gamma B}{c_1}$ = 2 et 20
ϕ_1 = 0°, 10°, 20°, 30°,
pour : $\frac{\gamma B}{c_1}$ ∞
$c_1 = 0$
$c_2 \neq 0$
c_2 non ∞
c_2 ∞
28
29
30
31
32
(∀ γ)
Dans chaque abaque : $\frac{\gamma B}{c_2}$ = 2 et 20
pour : $\frac{\gamma B}{c_2}$ = 0
ϕ_1 = 10°, 20°, 30°, 40°
pour : $\frac{\gamma B}{c_2}$ ∞
$c_1 = c_2 = 0$
33
34
35
36
37
dans chaque abaque : ∀ γ

2.6 ANALYSE DES RESULTATS EN FONCTION DE $\frac{H}{B}$

Quelques propriétés intéressantes peuvent être explicitées en analysant les résultats obtenus : A partir de quelle profondeur relative de la couche supérieure un bicouche peut il être considéré comme un milieu homogène ?

Soit $H' = \frac{H}{B}$ la profondeur relative de la couche supérieure,

et H'o cette valeur limite de H'.

Nous étudions sur les figures (2.14) à (2.17) l'influence des paramètres $\phi_1, \phi_2, m, \gamma'_1, \gamma'_2$ sur H'o.

2.6.1 La figure (2.14) montre que H'_o augmente avec ϕ_1, et d'autant plus rapidement que ϕ_2 et m sont faibles.

2.6.2 De la figure (2.15), il résulte que H'o diminue quand ϕ_2 augmente, et ceci est d'autant plus marqué que ϕ_1 est grand et m petit.

2.6.3 L'influence de γ'_2 ($c_1 = 0$) est étudiée sur la figure (2.16); elle est faible pour les grandes valeurs de ϕ_2 et les petites valeurs de ϕ_1, mais elle est considérable lorsque $\phi_2 = 0^\circ$ et lorsque ϕ_1 est grand. Dans tous les cas H'o augmente avec γ'_2. L'influence de γ'_1 ($c_1 \neq 0$) n'a pu être étudiée de manière plus complète par manque de valeurs numériques : fig. (2.17)

En conclusion les plus grandes valeurs de H'o sont données pour ϕ_1 grand, ϕ_2 faible, m et γ'_1 faibles. C'est le cas classique du bicouche : sol dur posé sur sol tendre. La valeur maximale de H'o est alors de 2.6.

Ces conclusions sont encore accentuées lorsque $c_1 = 0$ (sable en surface). Le cas le plus défavorable est encore celui où ϕ_1 est élevé, ϕ_2 est faible et γ'_2 élevé. La valeur maximale de H'o est alors de 4.3.

En résumé on peut considérer la couche supérieure comme de profondeur infinie pour :

- $H > B$ dans le cas d'une couche molle reposant sur un substratum plus dur.
- $H > 4.5\ B$ dans le cas d'une couche dure reposant sur une couche molle.

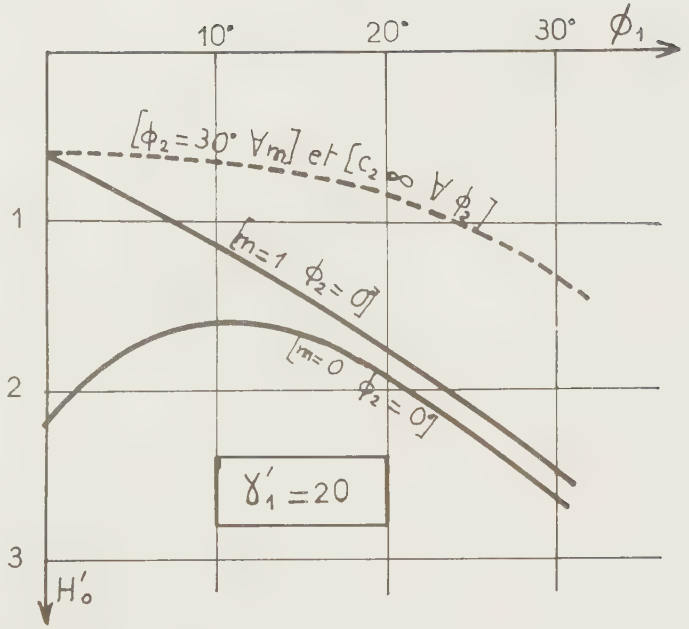


fig. 2.14

influence de m et de ϕ_1

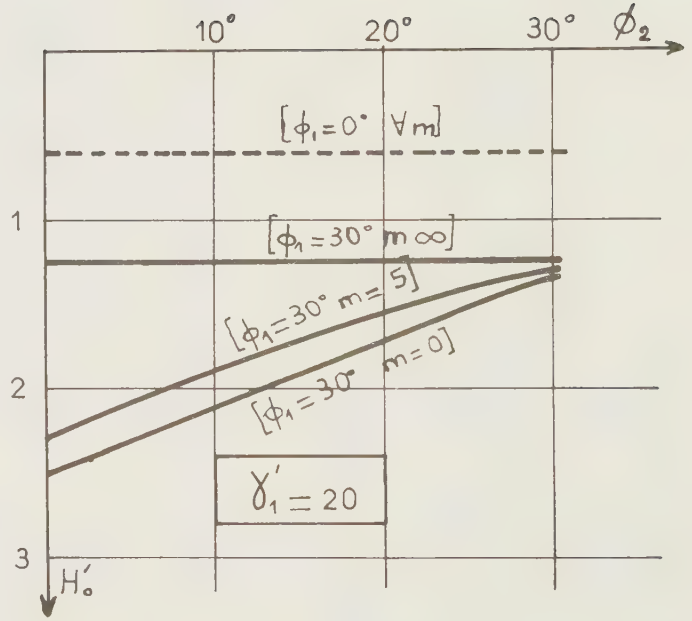


fig. 2.15

influence de m et de ϕ_2

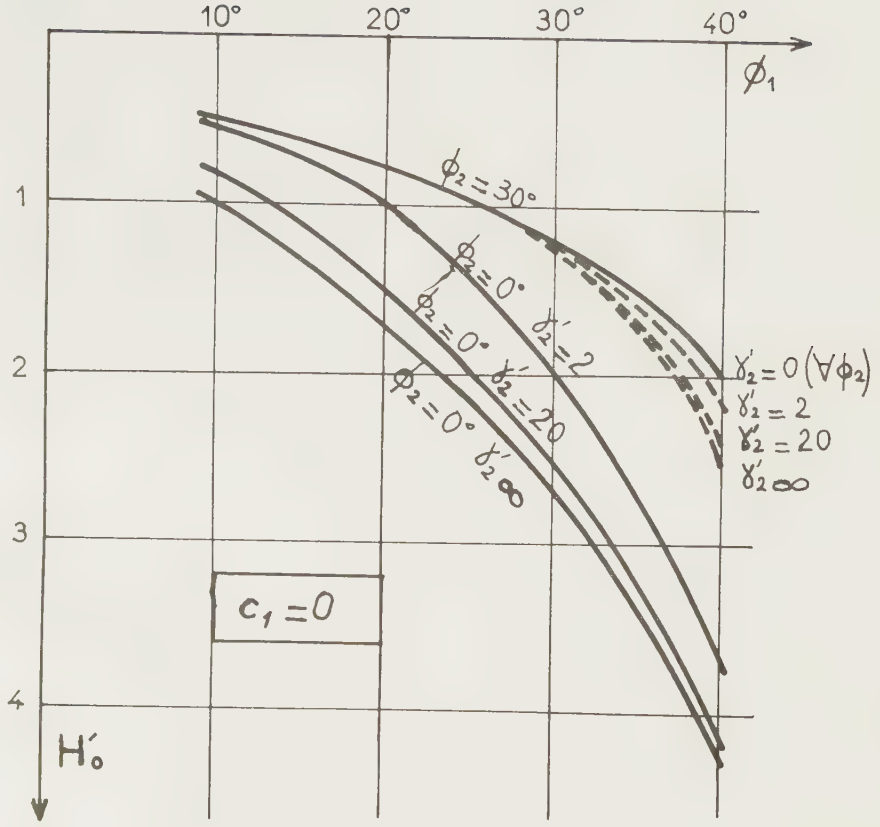


fig. 2.16

influence de γ'_2 et de ϕ_1

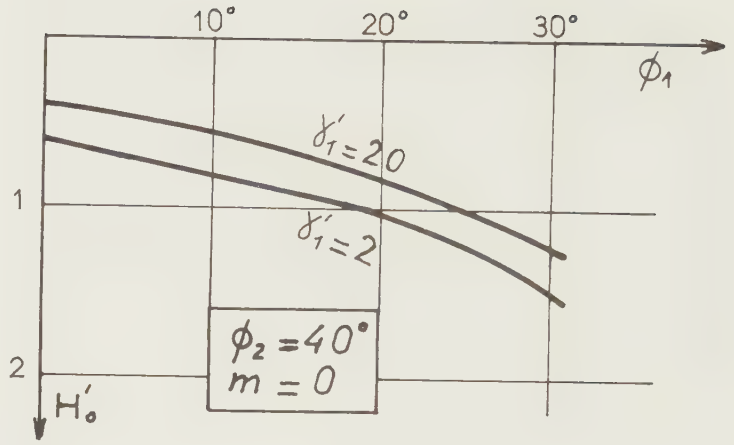


fig. 2.17

influence de γ'_1

2.7 ETUDE DE L'INFLUENCE DU CHOIX D'UNE LIGNE CIRCULAIRE

Nous pouvons étudier, dans le cas du milieu homogène, la hauteur de sol concernée par le passage de la ligne de glissement. Ceci est intéressant pour le milieu bicouche dans le cas où une couche molle repose sur une couche dure ou sur une assise rocheuse. Nous pouvons alors comparer, pour différentes méthodes de calcul, les diverses valeurs de la hauteur limite de la couche supérieure (à partir de laquelle le milieu peut être considéré comme homogène).

1- Coin triangulaire rigide de l'ouverture $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ (CAQUOT et KERISEL [13]).

2- Coin triangulaire rigide d'ouverture ϕ (TERZAGHI [109])

3- Présente méthode.

La figure (2.18) représente pour $\phi = 40^\circ$ les positions relatives des 3 courbes de glissement, et la figure (2.19) donne les résultats obtenus dans les 3 cas précédents pour H"o = valeur maximale de $\frac{H}{B}$. Ces hauteurs ont été calculées par les formules suivantes, qui se déduisent immédiatement de la figure (2.18):

cas 1 : $H''_o = \dfrac{e^{\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right].tg\phi} \cdot \cos\phi}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)}$

cas 2 : $H''_o = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}.tg\phi}}{2}$

cas 3 : $H''_o = R.\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

où θ est , bien entendu, une fonction de ϕ , fournie par l'ordinateur.

Remarque 1 : Il n'a pas été possible de comparer les 3 méthodes précédentes avec les courbes obtenues en milieu pesant, grâce aux méthodes numériques par différences finies. En effet, que le coin sous la fondation soit considéré comme limité par une droite (Tables de butée-poussée), ou par une caractéristique (STUTZ [101]), le point A est un point singulier non franchissable, s'il n'y a ni cohésion ni surcharge. On n'a pas tracé le réseau de caractéristiques correspondant et les valeurs de N_γ sont obtenues par extrapolation.

Remarque 2 : Contrairement à une opinion couramment admise, la longueur d'une ligne de glissement n'est pas le seul critère pour évaluer l'augmentation de la force portante : la forme de cette ligne intervient : cf. SPENCER [100] qui a fait cette étude pour les stabilités des pentes. Ensuite, pour une forme donnée, par exemple circulaire, l'angle θ joue un grand rôle. Plus il est aigu, et plus le moment moteur M_Q est petit. D'où l'augmentation extrêmement rapide de la force portante, (essentiellement due à ce phénomène) lorsqu'une assise rocheuse "écrase" le cercle de glissement.

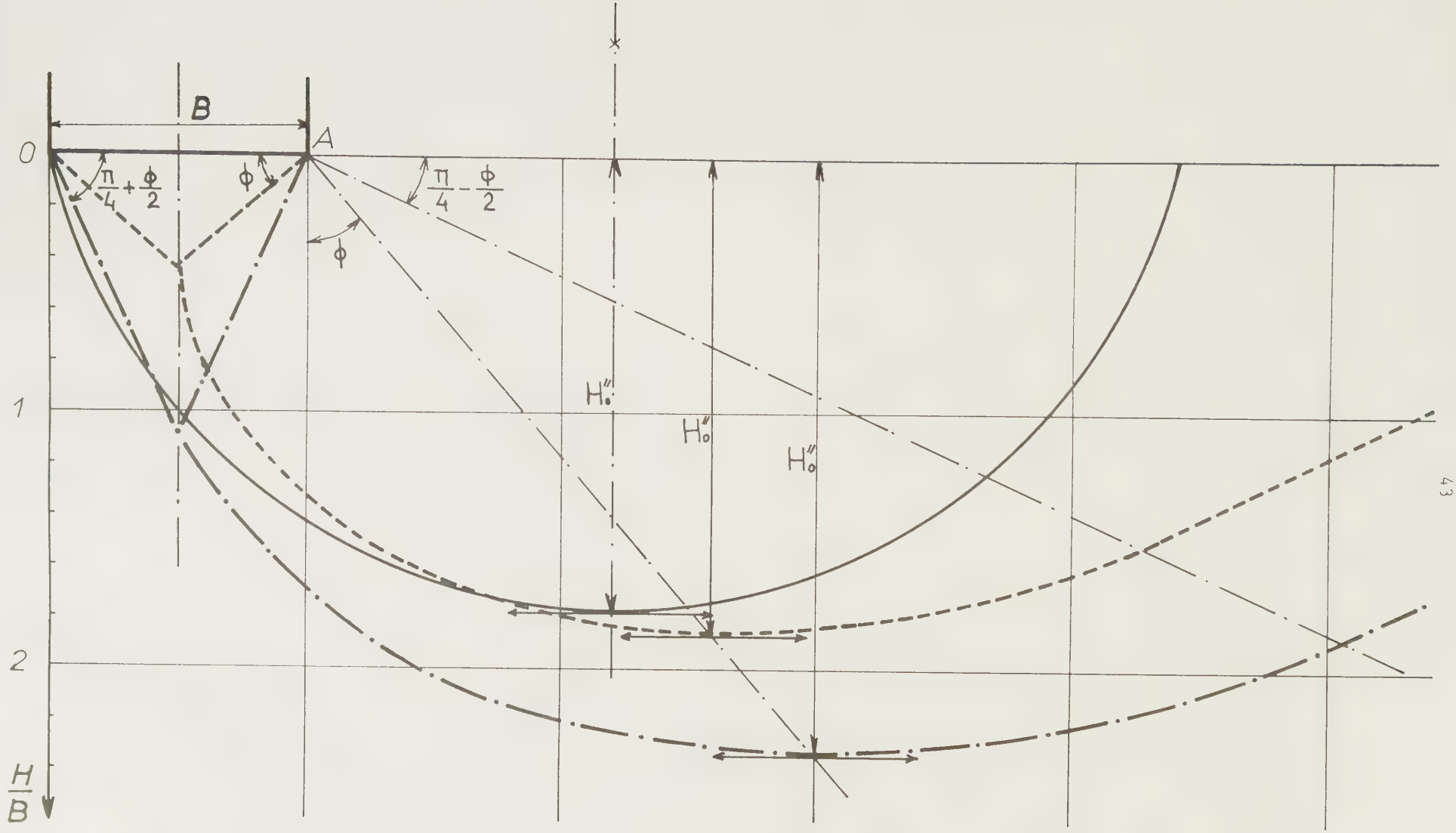


fig. 2.18

milieu homogène : 3 schémas de calcul

C = 0 Φ = 40°

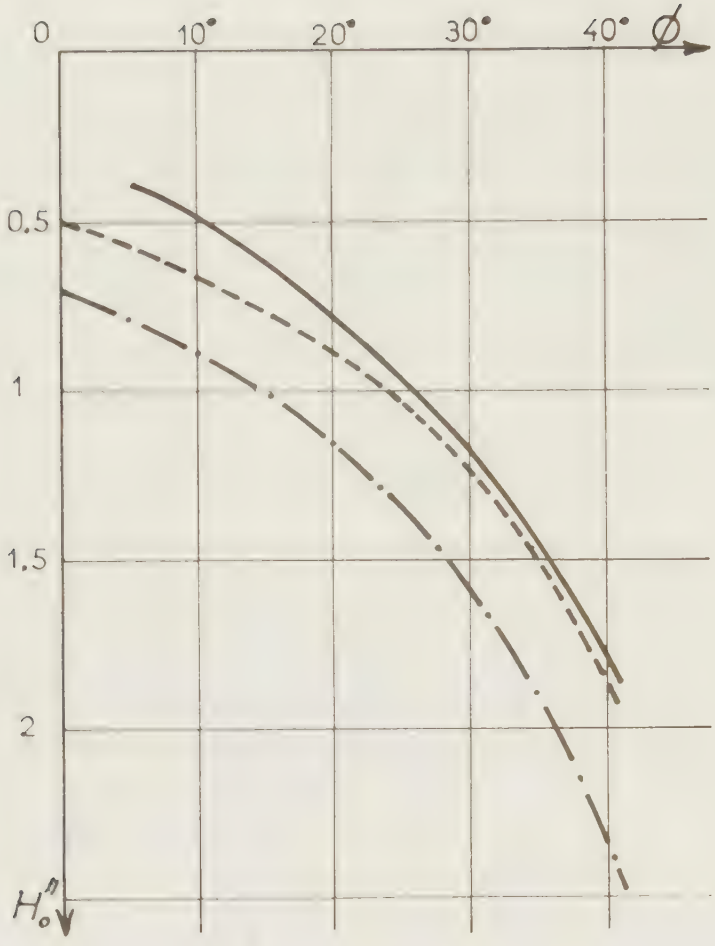


fig. 2.19

Profondeur relative de la zone déformée suivant 3 schémas de calcul.
Mêmes notations que la figure précédente.

Plus généralement, l'existence de 2 tendances contradictoires liées à la diminution de la longueur du cercle par diminution de θ explique l'existence d'un minimum pour la force portante, quelles que soient les caractéristiques du bicouche considéré.

2.8 COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS A L'AIDE DE CERCLES DE GLISSEMENT AVEC CEUX DES AUTRES METHODES.

(On pourra se reporter à la très complète étude bibliographique de TRÂN-VÔ-NHIÊM [112] graphiques 4 à 9). Cette comparaison ne s'entend que dans le cas très particulier du milieu homogène. D'autres comparaisons seront menées dans les chapitres III, IV, et V dans divers autres cas particuliers où des études ont été faites.

2.8.1 Valeurs de N_γ

Nous donnons sur la fig. (2.20) différentes valeurs du coefficient N_γ proposées par divers auteurs, pour $10° \leqslant \phi \leqslant 40°$. Pour ϕ situé entre 0 et 10° N_γ est faible et toutes les méthodes donnent des résultats très voisins.

On s'aperçoit que pour $\phi > 35°$ les valeurs proposées par la présente étude deviennent sensiblement plus faibles que les valeurs proposées par MEYERHOF [66], TERZAGHI [109], SOKOLOVSKY [97] et à Grenoble par GIROUD [30] d'après BIAREZ [3].

2.8.2 Valeurs de N_c

La méthode employée ici ne donne pas de valeur de N_c puisque ce coefficient, calculé pour un milieu sans pesanteur, n'a pas de signification physique. Mais pour évaluer la part due à la cohésion dans le terme $N_{c\gamma}$ nous avons, pour un milieu homogène, eu recours à l'écriture suivante :

$$q = \frac{1}{2}\gamma B N_{c\gamma} = c N_c + \frac{1}{2}\gamma B N_\gamma$$

d'où l'on tire :

$$N_c = \frac{1}{2}\frac{\gamma B}{c}\left(N_{c\gamma} - N_\gamma\right)$$

Ce terme N_c est donc une fonction de ϕ et de $\frac{\gamma B}{c}$. Nous donnons sur la figure (2.21) les valeurs de N_c pour $\frac{\gamma B}{c} = 2$ et 20 et pour différents auteurs.

Nous pouvons faire 3 constations :

- N_c varie très peu avec $\frac{\gamma B}{c}$. Ce qui entraîne que l'erreur faite en le supposant indépendant de ce facteur (comme lorsqu'on superpose les états d'équilibre limite par la méthode classique) est faible.

- Les valeurs trouvées ici s'écartent sensiblement des valeurs des différents auteurs pour $\phi > 30°$.

- N_γ et N_c, donc $N_{c\gamma}$, varient preque linéairement pour $0° < \phi < 40°$ avec l'échelle semi-logarithmique choisie. Ce qui justifie l'interpolation proposée au paragraphe 2 .9.

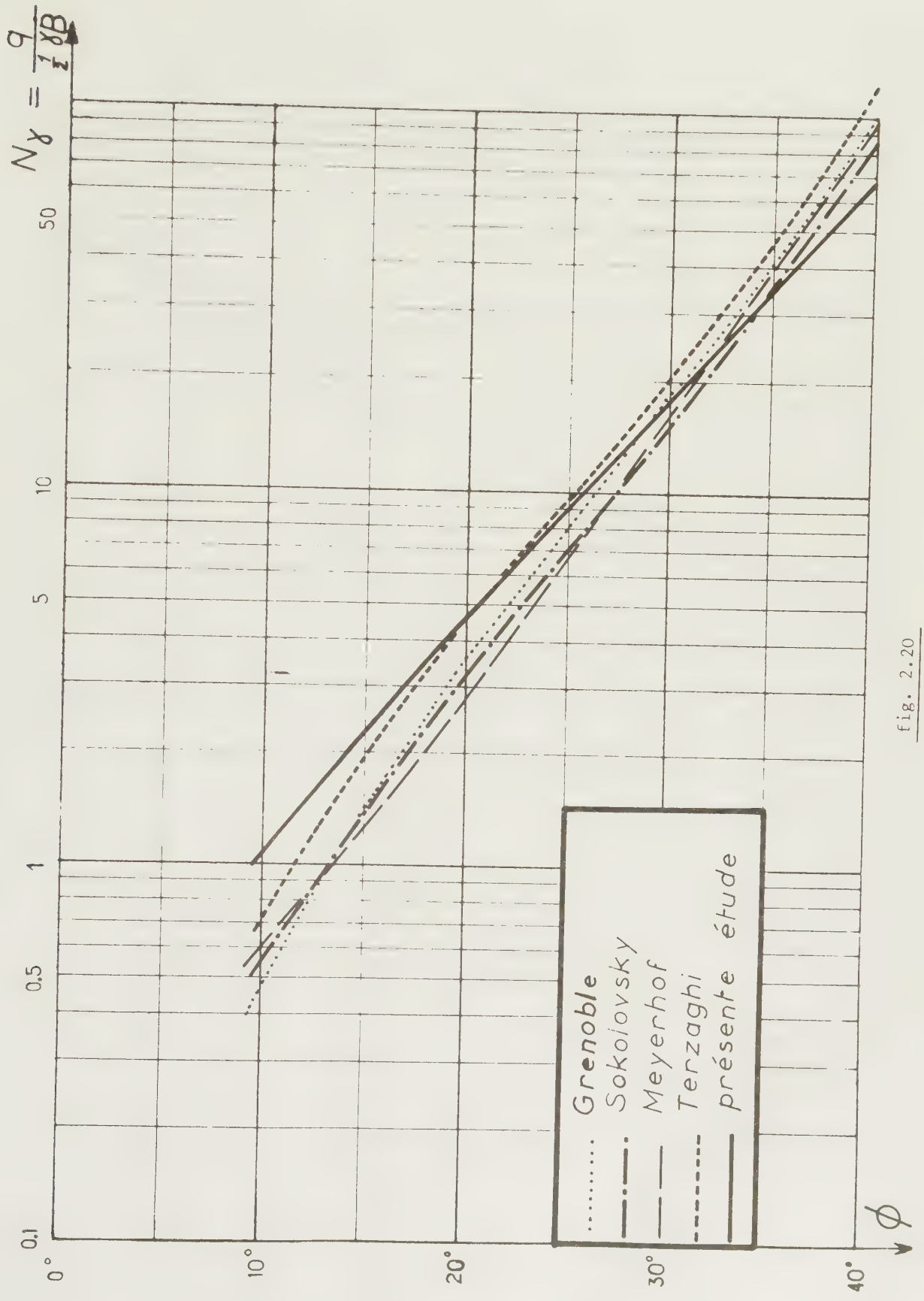

$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0,1
0,5
1
5
10
50
0°
10°
20°
30°
40°
ϕ
Grenoble
Sokolovsky
Meyerhof
Terzaghi
présente étude

fig. 2.20

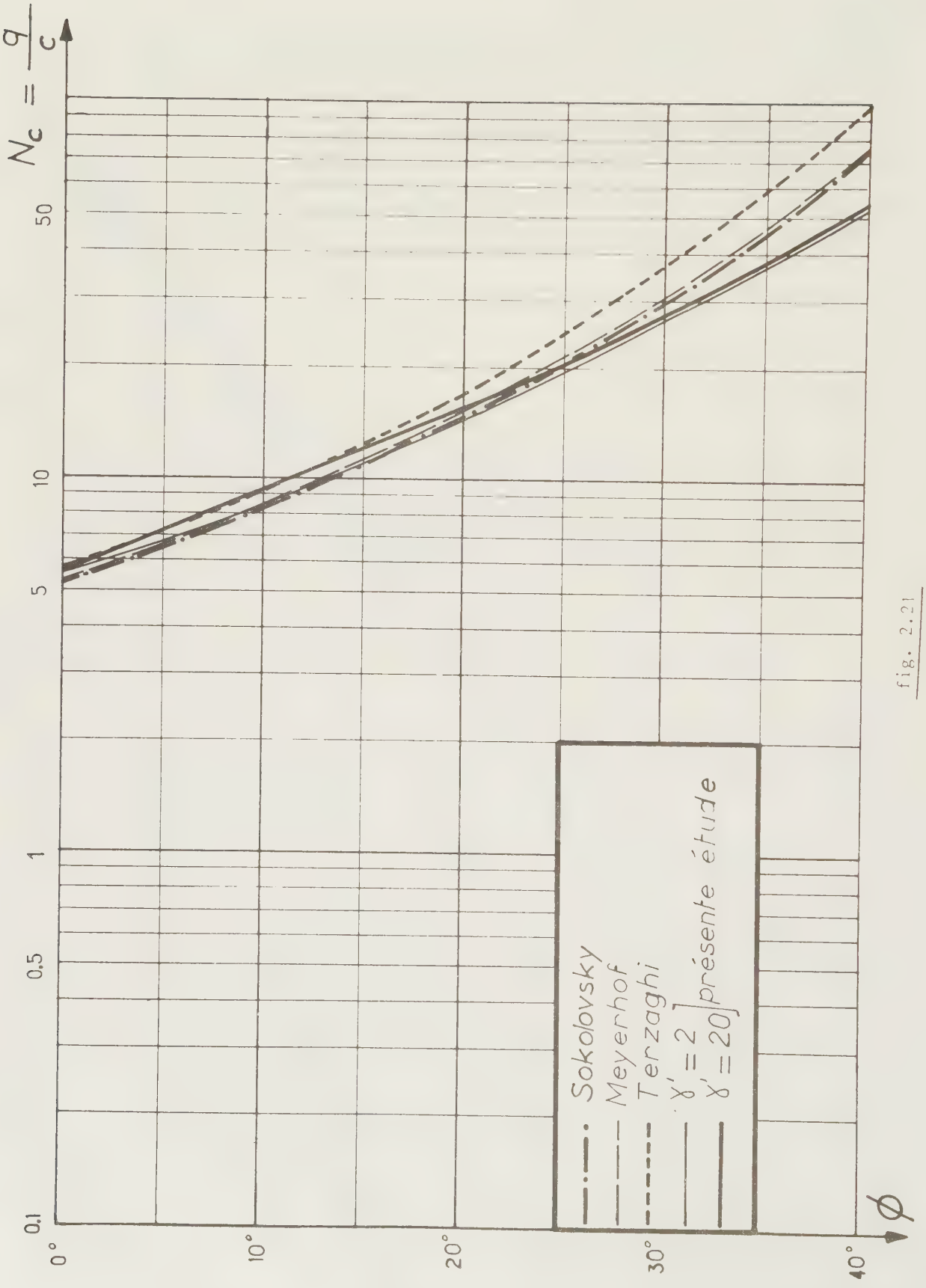

$N_c = \frac{q}{c}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0°
10°
20°
30°
40°
ϕ
Sokolovsky
Meyerhof
Terzaghi
$\gamma' = 2$
$\gamma' = 20$
présente étude

fig. 2.21

2.9 UTILISATION DES ABAQUES

2.9.1 Interpolation. (Nous supposerons $C_1 = 0$)

a) entre deux valeurs de $\frac{\gamma B}{c_2} = \gamma'_2$

Il faut utiliser l'échelle inverse de γ'_2 soit $\frac{1}{\gamma'_2}$

On s'aperçoit en effet que celle-ci donne de très bons résultats, même pour des différences tabulaires très grandes, ainsi pour $\phi_2 = 10°$

γ'_2	$\frac{1}{\gamma'_2}$	$N_{c\gamma}$
∞	0	1.1
20	0.05	2
2	0.5	9.8
0	∞	∞

En interpolant entre $\gamma'_2 = \infty$ et 2 pour retrouver la valeur 2 de $N_{c\gamma}$ correspondant à $\gamma'_2 = 20$

On trouve $N_{c\gamma} = 1.1 + \frac{0.05 \times 8.8}{0.5} = \underline{1.98}$

b) Entre deux valeurs de ϕ_1 : On utilisera une échelle linéaire directement sur l'abaque en coordonnées semi-logarithmiques. En effet, dans le cas du milieu homogène, les intervalles apparents entre $\phi_1 = 10°$, 20°, 30°, 40° sont à peu près constants, avec l'échelle logarithmique choisie.

c) Entre deux valeurs de ϕ_2 : On utilisera, pour les mêmes raisons, le même artifice.

2.9.2 Exemple

: on veut poser un radier de largeur $B = 11.75$ m sur un sol composé d'une couche supérieure de sable de hauteur $H = 14$ m, et de caractéristiques: $\gamma = 1.65$ t/m^3

$\phi_1 = 40°$,

reposant sur une argile surconsolidée de caractéristiques: $\gamma = 1.75$ t/m^3

$\phi_2 = 22°$

$c_2 = 2$ t/m^2

On ne fera pas une grosse erreur en prenant un poids volumique $\gamma = 1.70$ t/m^3 pour l'ensemble du sol. $\frac{H}{B} = 1.2$, $\frac{\gamma B}{c_2} = 10$

Abaque $C_1 = 0$, $\phi_2 = 30°$	Abaque $C_1 = 0$, $\phi_2 = 20°$
$\frac{1}{\gamma'_2} = 0.05 \longrightarrow N_{c\gamma} = 35$	$\frac{1}{\gamma'_2} = 0.05 \longrightarrow N_{c\gamma} = 22$
$\frac{1}{\gamma'_2} = 0.50 \longrightarrow N_{c\gamma} = 52$	$\frac{1}{\gamma'_2} = 0.50 \longrightarrow N_{c\gamma} = 34$
$\frac{1}{\gamma'_2} = 0.10 \longrightarrow$	$\frac{1}{\gamma'_2} = 0.10 \longrightarrow$
$N_{c\gamma} = 35 + \frac{17 \times 5}{45} = 37$	$N_{c\gamma} = 22 + \frac{12 \times 5}{45} = 23.3$

On porte alors ces 2 abscisses sur un même abaque et on fait une interpolation métrique en prenant (pour 22°) les 2/10 du segment qui joint les 2 points. Finalement la valeur cherchée est $N_{c\gamma} = 25$

et $q = \frac{1}{2} \cdot \gamma . B . N_{c\gamma} = 0.5 \times 1.7 \times 11.75 \times 25 = \underline{250 \text{ t/m}}$

2.10 PROBLEME DE LA FORCE PORTANTE A LONG TERME D'UN SOL AVEC PRESENCE D'UNE NAPPE.

Ce cas est peu différent des cas précédents.

Traitons tout d'abord le cas le plus général.

2.10.1 Cas général.

La répartition des poids volumiques à prendre en compte pour le calcul de la force portante est donnée sur la fig. (2.22) en fonction de la profondeur z.

où γ_d est le poids volumique sec

γ_{sat} " " " saturé

$\overline{\gamma}$ " " " immergé

La nappe étant à la profondeur H_3 , la zone ① est sèche, la zone ② humide, la zone ③ saturée par capillarité, et la zone ④ sous la nappe.

Le calcul exact de la force portante est donné en Annexe I, il est analogue à celui du bicouche.

On pose $r' = \frac{r}{B}$, $N_{c\gamma} = \frac{Q}{\frac{1}{2}\gamma_d B^2}$, $H_1' = \frac{H_1}{B}$, $H_2' = \frac{H_2}{B}$, $H_3' = \frac{H_3}{B}$.

et il vient : $A_4 N_{c\gamma}^2 + 2B_4 N_{c\gamma} + C_4 = 0$ (2-18)

Les valeurs de A_4, B_4 et C_4 sont données en Annexe I.

$N_{c\gamma}$ dépend alors de 6 paramètres adimensionnels : H_1' , H_2' , H_3' , $\frac{c}{\gamma_d B}$, ϕ, et n (porosité du sol)

Il est très difficile de présenter des résultats complets avec autant de paramètres. Nous avons donc choisi de simplifier la distribution des poids volumiques.

2.10.2 La figure (2.22) se simplifie selon la figure (2.23)

Remarquons que pour un sol purement pulvérulent (sable, gravier), ceci représente une distribution proche de la réalité. En revanche, pour un silt ou une argile cette simplification est la seule qui est toujours dans le sens de la sécurité en donnant un minorant de la force portante.

Les résultats du calcul sont inclus dans les solutions de l'équation (2-18). Nous avons porté les résultats sous forme d'abaques qui restent simples, puisque $N_{c\gamma}$ ne dépend plus que de H_3' , $\frac{c}{\gamma_d B}$ et ϕ : fig. (2.24 et 2.24 bis).

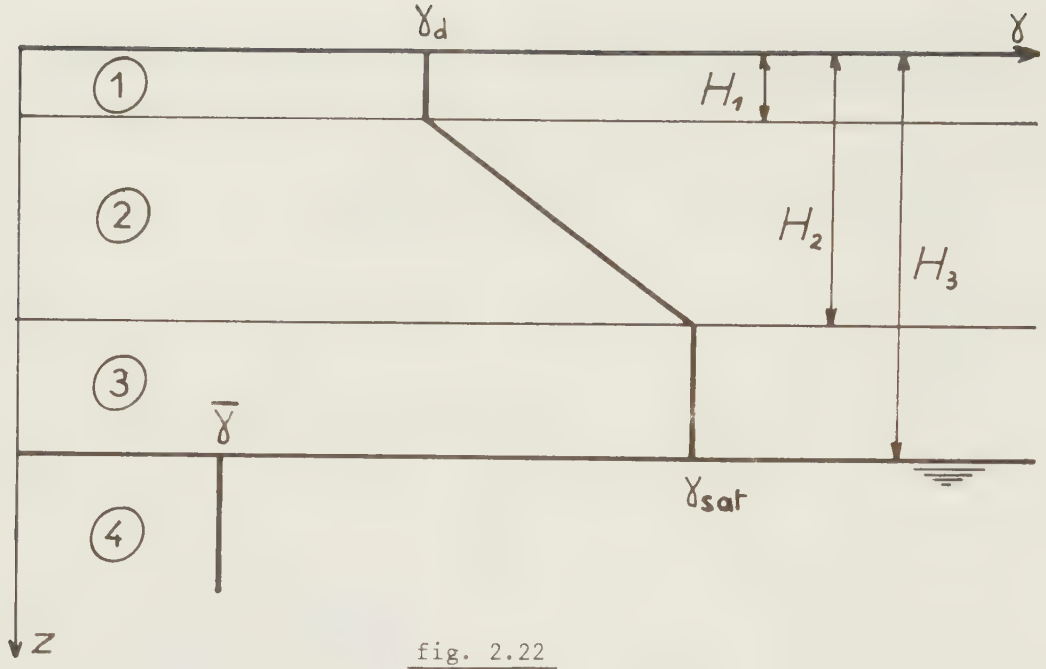


fig. 2.22

Cas d'une nappe : distribution réelle des poids volumiques.

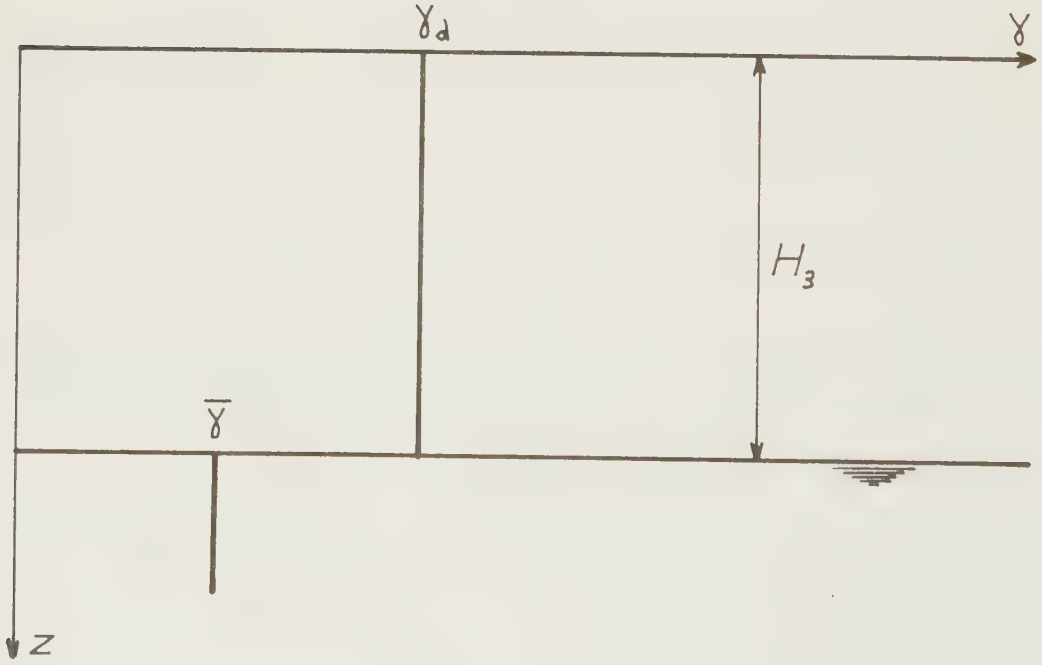


fig. 2.23

Cas d'une nappe : distribution simplifiée
des poids volumiques.

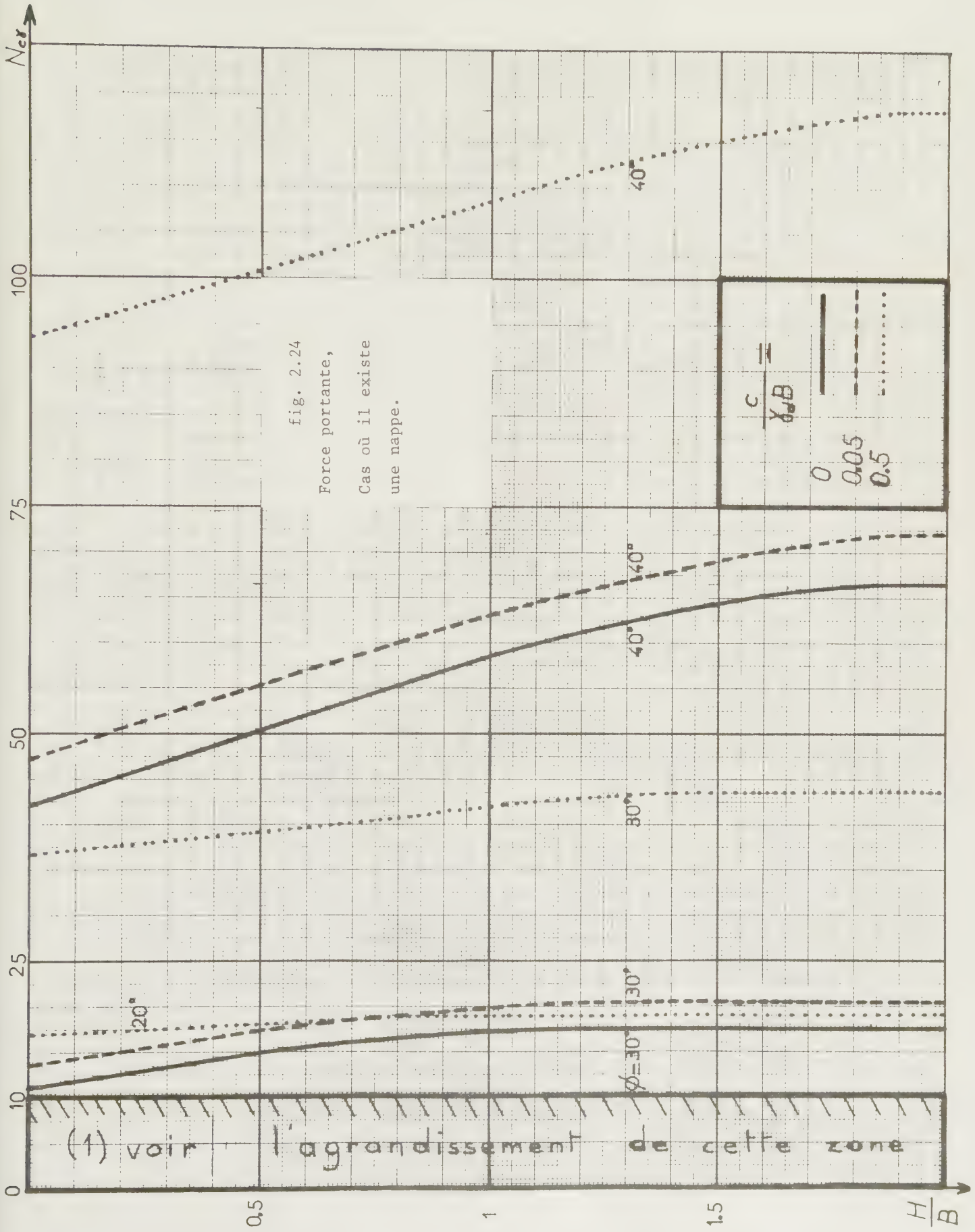


fig. 2.24
Force portante,
Cas où il existe
une nappe.

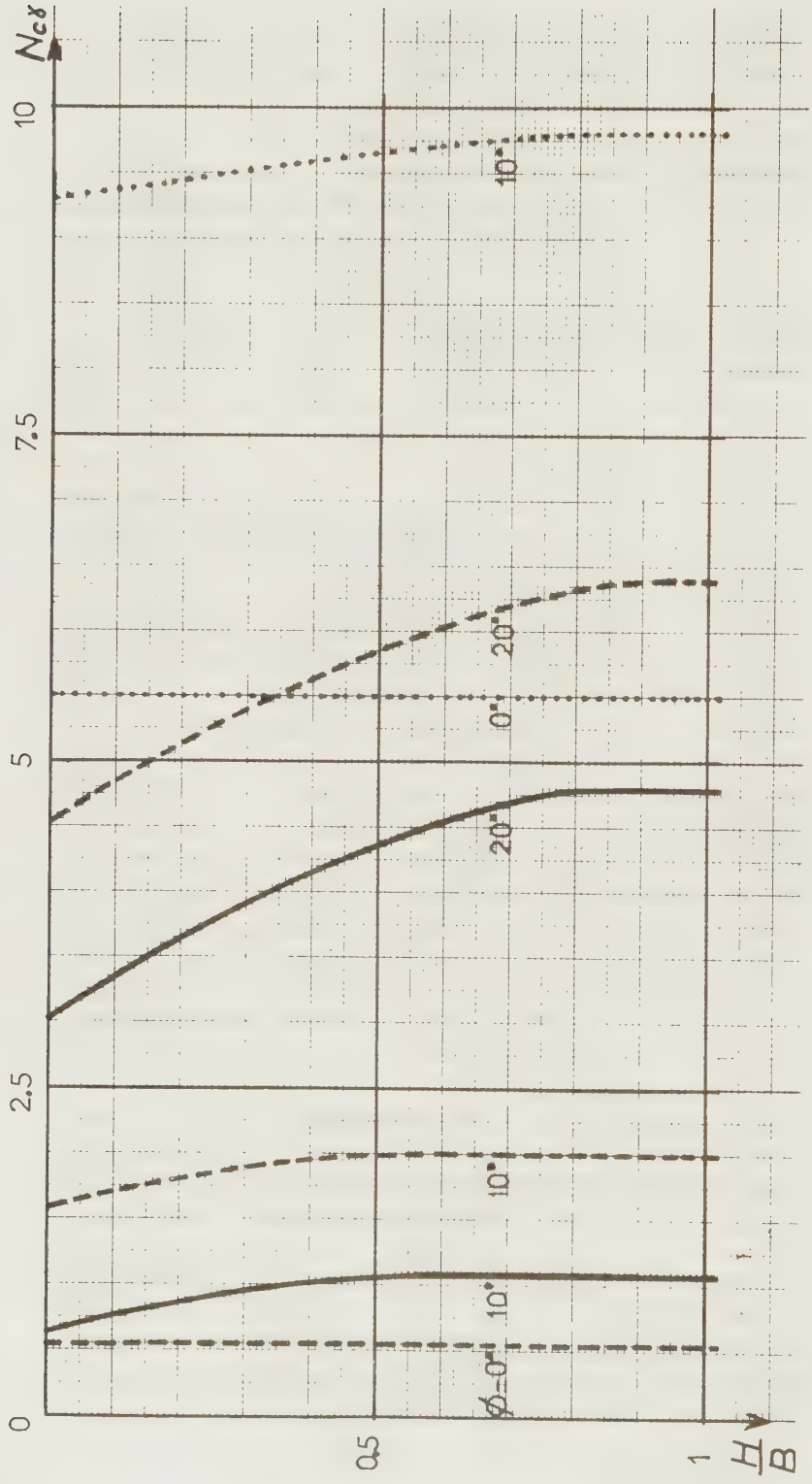


fig. 2.24 bis.

Agrandissement de la zone 1 de la figure 2.24.

2.10.3 Remarques

- La porosité n n'intervient plus car le rapport $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_d} = \frac{G-1}{G}$ n'en dépend pas.

- $\frac{G-1}{G}$ peut être considéré comme constant (0.63) quand G varie de 2.65 à 2.75.

- En voulant chercher un majorant de $N_{c\gamma}$, en prenant γ_{sat} au lieu de γ_d dans la couche supérieure, on s'aperçoit que les résultats dépendent alors de 4 paramètres : H'_3 , $\frac{c}{\gamma_{sat} B}$, ϕ et n (ou γ_d).

Ce paradoxe s'explique par le fait que si la différence $\gamma_{sat} - \bar{\gamma} = \gamma_w$ est constante, en revanche le rapport $\frac{\gamma_{sat}}{\bar{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma_w}{\bar{\gamma}}$ dépend de $\bar{\gamma}$, donc de n ou de γ_d.

2.10.4 Remarque sur les résultats

Le terme $N_{c\gamma}$ présente une variation non négligeable avec la profondeur de la nappe.

Les plus grandes variations absolues apparaissent quand $\frac{c}{\gamma_d B}$ et ϕ sont grands.

Mais les plus grandes variations relatives, quand $\frac{c}{\gamma_d B}$ est petit.

La profondeur à partir de laquelle la présence d'une nappe ne modifie plus le terme de force portante $N_{c\gamma}$ augmente avec ϕ et $\frac{c}{\gamma_d B}$. Finalement il semble qu'on puisse négliger la présence d'une nappe située à une profondeur supérieure à 2 fois la largeur de la fondation.

2.10.5 Présentation pratique des résultats

Avec une très bonne approximation (moins de 10% d'erreur) on peut dire que la différence entre les termes $N_{c\gamma}$ obtenus dans le cas homogène et dans le cas où il existe une nappe, ne dépend pas du paramètre $\frac{c}{\gamma_d B}$. En conséquence on pourra utiliser en pratique la figure (2.25) où cette différence est donnée en fonction de ϕ et de $\frac{H}{B}$.

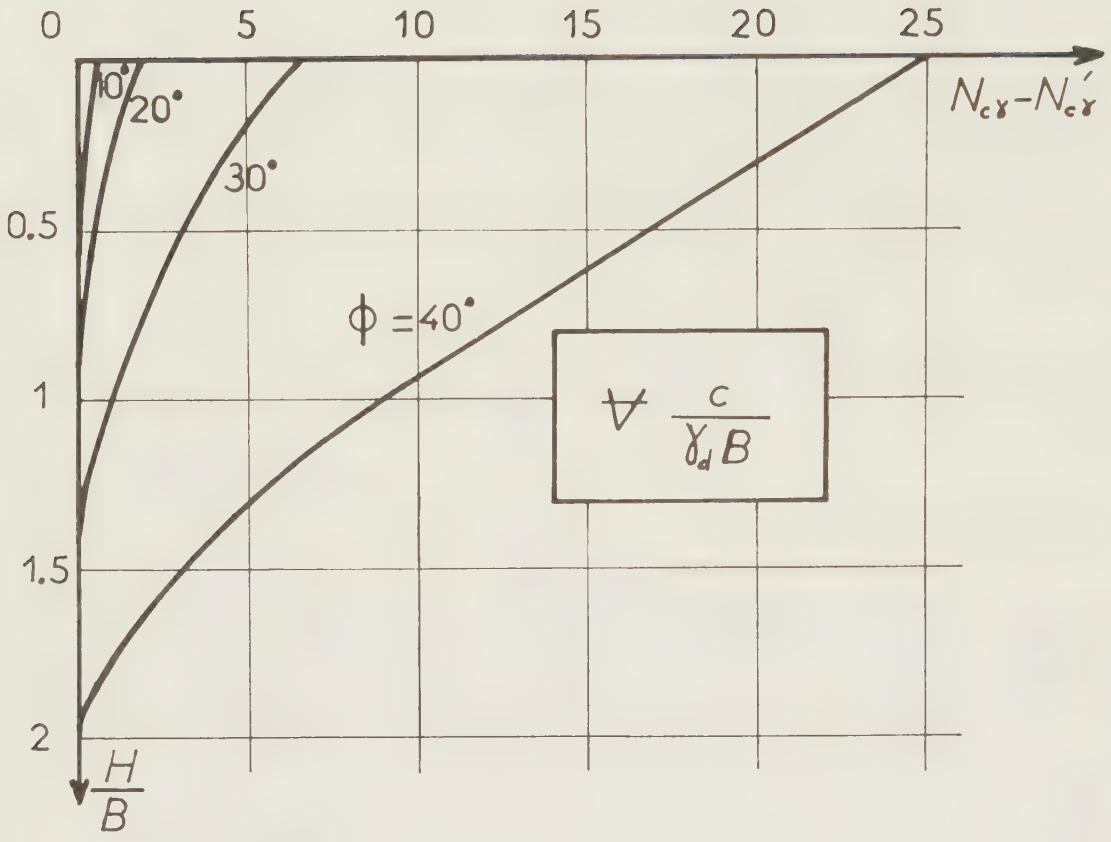


fig. 2.25

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma_d B}$ pour un milieu homogène.

$N'_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma_d B}$ pour un sol où il existe une nappe à la profondeur H

CHAPITRE III

FORCE PORTANTE D'UN SOL BICOUCHE COMPOSE D'UNE COUCHE PULVERULENTE REPOSANT SUR UNE ASSISE PUREMENT COHERENTE

PLAN DU CHAPITRE III

1- Notations 59
2- Introduction 60
3- Les travaux effectués au CEBTP 60
4- Les travaux de KOÏZUMI 74
5- Les travaux de YAMAGUCHI 77
6- Autres travaux 81
7- Conclusion générale 83

3.1 NOTATIONS

B : largeur de la fondation

B_o : largeur optimale de la fondation pour laquelle la pression portante est maximale

c : cohésion de la couche inférieure

D : profondeur de la base d'une fondation enterrée

H : hauteur de la couche supérieure

H_{max} : hauteur maximale de la caractéristique verticale issue du bord de la fondation (calcul de TCHENG)

H_m : hauteur minimale de la couche supérieure à partir de laquelle le poinçonnement ne se produit pas

K_{ah} : composante horizontale du coefficient de poussée K_a

K_{pv} : composante verticale du coefficient de butée K_p

N_c, N_q, N_γ : coefficients de force portante (formule de TERZAGHI)

$N_c = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$

p : contrainte sur bc pour KOÏZUMI

p_o : contrainte à l'interface du bicouche

Q : force portante limite

$Q_1 = q_m B_o$

q : pression portante limite $= \frac{Q}{B}$

q_1 : " " " pour $B < B_o$

q_2 : " " " pour $B > B_o$

q_3 : " " " pour $B \infty$

q_m : valeur maximale de q, pour $B = B_o$

q'_2 : valeur de q_2 lorsqu'il existe une remontée du sable et un frottement suivant DF (YAMAGUCHI)

q_{1D} , q_{2D} , q_{3D} : valeurs de q_1 , q_2 , q_3 pour une fondation enterrée.

W : poids propre de la fondation

w_L : limite de liquidité d'une argile

w_p : limite de plasticité d'une argile

γ : poids volumique du sol

γ_d : poids volumique du sol sec

γ_1 : poids volumique de la couche supérieure

γ_2 : poids volumique de la couche inférieure

γ'_1 : poids volumique de la surcharge latérale

ϕ : angle de frottement interne de la couche supérieure

ϕ_2 : angle de frottement interne de la couche inférieure (en général $\phi_2 = 0$)

σ_t : contrainte tangentielle verticale moyenne le long d'une droite de rupture lors d'un poinçonnement de la couche supérieure.

τ : contrainte tangentielle verticale lorsqu'il existe une remontée du sable

3.2 INTRODUCTION :

Le sol qui va retenir notre attention dans ce chapitre est formé d'une couche superficielle dure (que l'on supposera pulvérulente) surmontant une couche molle (que l'on supposera purement cohérente). Ce cas est d'autant plus intéressant qu'il se rencontre fréquemment dans la nature. L'ingénieur, muni de la formule classique de TERZAGHI supposant le milieu homogène, se trouve pris dans une alternative délicate : s'il considère le sol comme étant uniquement formé d'argile il se prive des propriétés mécaniques intéressantes de la couche superficielle et il ne fondera que des ouvrages légers. Par contre, en considérant le sol comme formé de sable jusqu'à une grande profondeur, il risque la ruine de l'ouvrage. C'est pourquoi dès les années 50, des chercheurs, en France et au Japon, se sont attachés, par des voies souvent éloignées, à résoudre ce problème. On constatera que leurs résultats convergent néanmoins et peuvent trouver une application intéressante dans le domaine des fondations profondes.

3.3 LES TRAVAUX EFFECTUES AU CENTRE EXPERIMENTAL DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS (CEBTP) A PARIS.

Depuis 1953, TCHENG, MILOVIC et LEBEGUE ont mené à bien d'importantes études expérimentales et théoriques au CEBTP. Il nous a semblé préférable de bien séparer, dans notre analyse, ce qui procède de l'une ou de l'autre approche.

3.3.1. Travaux expérimentaux

3.3.1.1 Généralités :

Il s'agit d'essais sur un modèle réduit constitué d'une couche de matériau purement cohérent (vase, graisse) suportant une couche pulvérulente (sable, billes de verre). Nous avons pu lors d'un stage effectué au CEBTP manipulé l'excellent matériel qui fut utilisé pour ces expériences. Le lecteur trouvera dans la thèse et dans une communication de TCHENG [106], [107], et dans diverses notes de LEBEGUE [50], [51], [52], [53] et [54], des renseignements plus détaillés que la trop brève analyse qui suit.

3.3.1.2 Matériaux

Graisse : $\phi = 0°$ la cohésion c varie de 10 à 20 $g./cm^2$ suivant la température. Elle ne varie pas avec le temps. Une légère viscosité nécessite des enfoncements à vitesse constante. (voir dans [106] la fig. 19.)

Argile : Argile de Provins reconstituée : w_L de 105 à 123% ; w_P de 26 à 33%. (voir dans [106] la fig. 20 et 21.)

Sable : Sables de Seine, de Fontainebleau et de Magny. ϕ de 35° à 37°
γ_d de 1,5 à 1,8 t/m^3
(voir dans [106] la fig. 21.)

Billes de verre : diamètre 100 μ. ϕ de 24° à 25°
γ_d de 1.48 à 1.57 t/m^3

3.3.1.3 Appareillages- Mesures

Cuve : 80 cm X 40 cm X 9,4 cm

Semelles : Différents dispositifs ont permis d'utiliser des radiers rigides ou souples, lisses ou rugueux, maintenus horizontaux pendant l'essai par un guidage ou bien pouvant pivoter lors de l'enfoncement.

Frottement parasite : Celui-ci, éliminé grâce à différents dispositifs entre cuve d'une part, graisse et semelle d'autre part, a été mesuré entre sable et cuve. (voir fig. 2 dans [107].)

Critère de rupture : C'est le premier maximum de la courbe effort - enfoncement, qui présente ensuite, soit un palier, soit d'autres maxima.

3.3.1.4 Résultats

Schémas de rupture : pour $\frac{H}{B} < 1.5$, les lignes observées sont verticales dans le milieu pulvérulent (poinçonnement). Quand on fait croître $\frac{H}{B}$ ces lignes de rupture s'incurvent, pour reprendre l'allure habituelle observée en milieu homogène quand $\frac{H}{B} > 3.5$: fig. (3.1) et (3.2)

Pression à l'interface p_o : celle-ci, mesurée à l'aide de cellules manométriques, est comparée à la pression portante limite du bicouche sur la fig. (3.3)
La courbe théorique (en pointillés) est obtenue en admettant que p_o, pression à l'interface, est égal à $(2 + \pi).c$. TCHENG précise que les mesures de p_o sont toujours légèrement supérieures à $[(2 + \pi).c + \gamma_d H]$

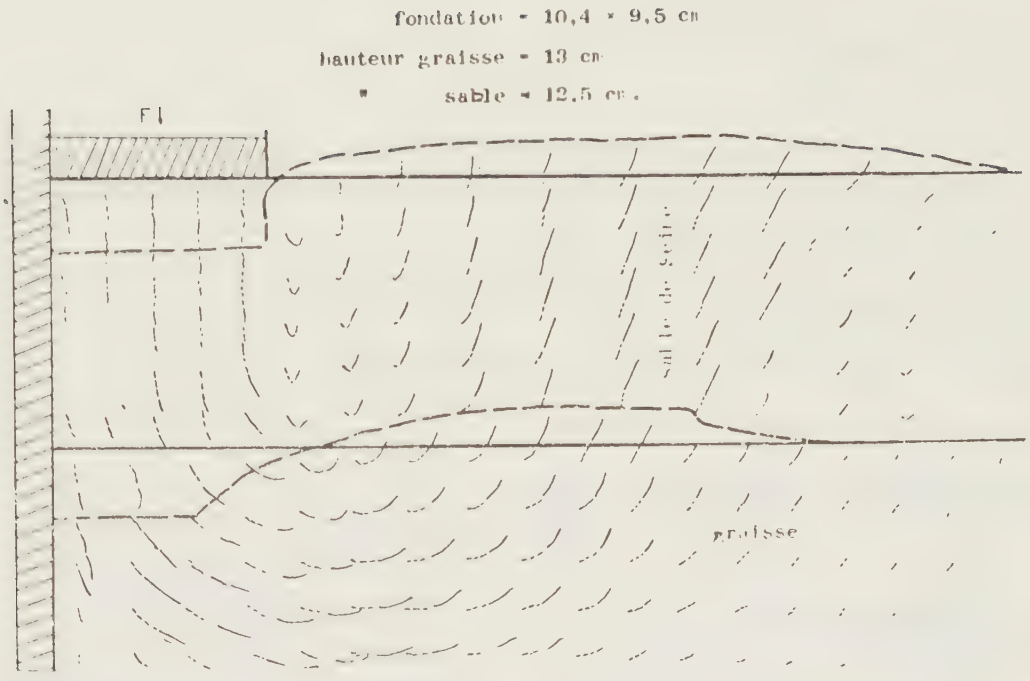


fig. 3-1 : Schéma de rupture du sol d'après un essai de TCHENG.
Poinçonnement de la couche de sable - $\frac{H}{B} = 1.2$

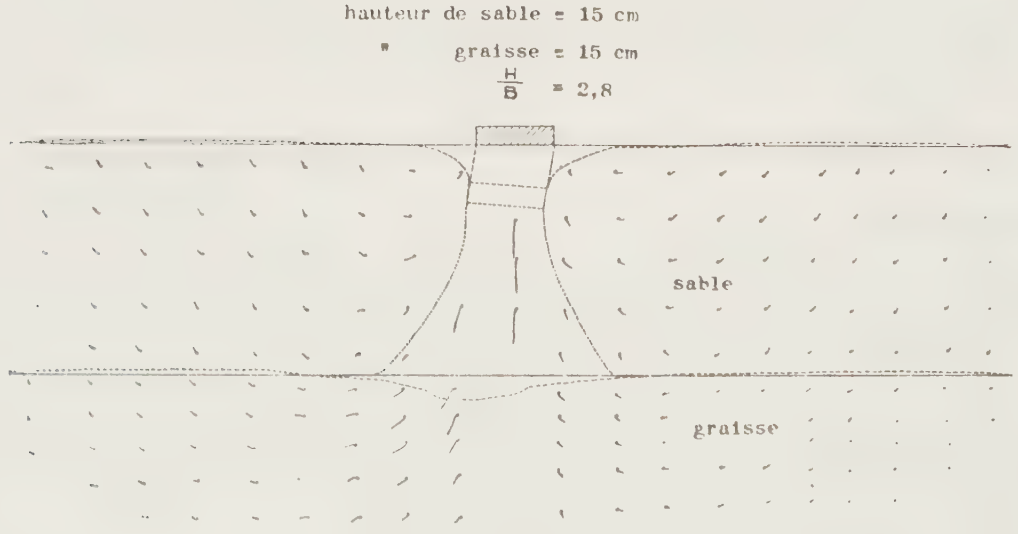


fig. 3.2 : Schéma de rupture du sol d'après un essai de TCHENG.
Sable sur graisse . $\frac{H}{B} = 2.8$

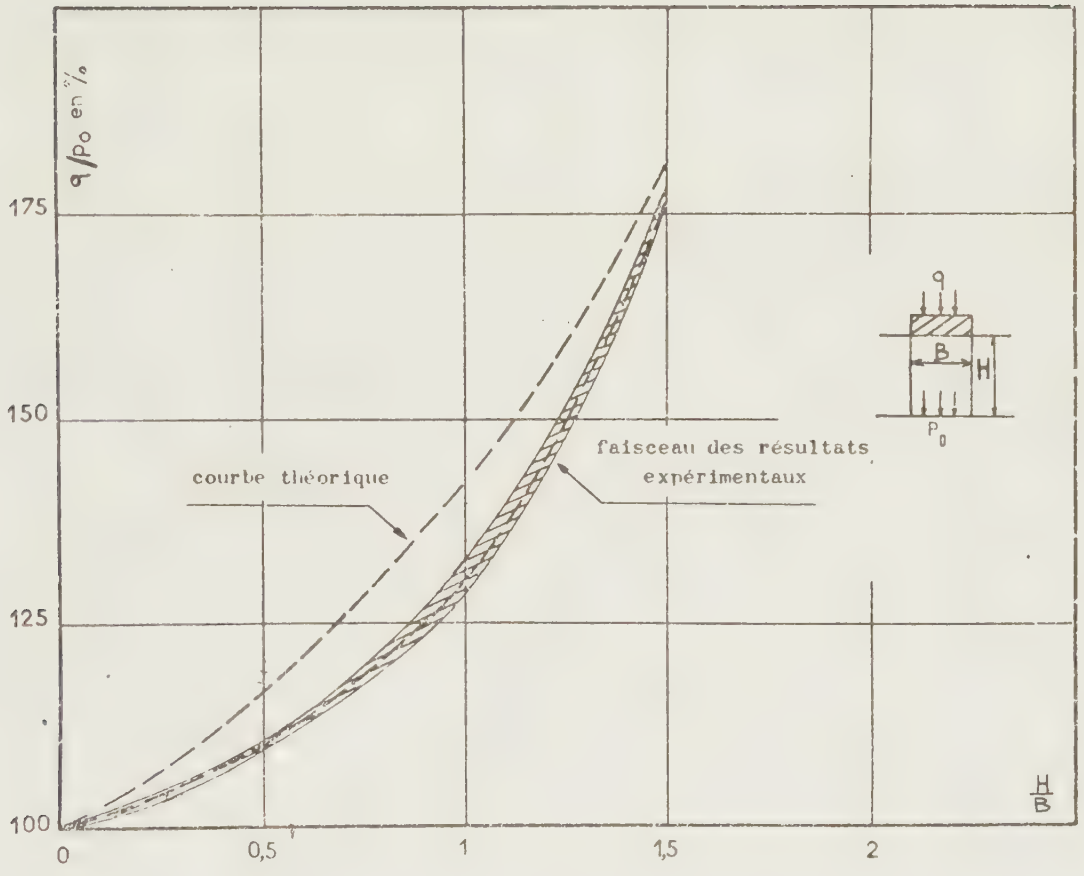


fig. 3.3 : Résultats d'essais de TCHENG .

Cas du poinçonnement de la couche de sable : comparaison des valeurs théoriques et expérimentales de $\frac{q}{p_0}$

[courbe théorique tracée avec la pression à l'interface $p_0 = (\pi + 2).c$]

Pression portante limite q : On se reportera à la figure (3.4) sur laquelle on distingue très nettement les 3 zones de types de rupture différentes.
On remarquera que pour $\frac{H}{B} < 1.5$, avec le mode de représentation choisi, la largeur B n'intervient pas, puisqu'il y a poinçonnement de la couche supérieure.

Fondation enterrée, influence de la profondeur de la semelle. LEBEGUE [52] a montré, par une série d'expériences, que la force portante limite est une fonction linéaire croissante de la profondeur de la semelle : fig. (3.5). C'est un résultat déjà classique en ce qui concerne un milieu homogène.

3.3.1.5 Remarques personnelles

a) Dans une série d'essais d'enfoncement d'une semelle rigide supportant une charge verticale centrée, dans un milieu homogène, TCHENG a relevé la forme des lignes de rupture marginales. Celles-ci sont relativement proches d'arcs de cercles : fig. (3.6). Malheureusement, l'auteur ne fournit pas les caractéristiques géométriques de ces arcs de cercles, ce qui ne nous permet pas de les comparer avec ceux obtenus par nos calculs, pour un milieu homogène analogue, au Chapitre II.

b) Dans le cas précis où l'on observe un poinçonnement de la couche supérieure ($\frac{H}{B} < 1.5$) il est intéressant d'isoler ce qui, dans la force portante limite, est dû au frottement sable sur sable le long des parois du bloc ABCD : fig. (3.7) Ainsi, le long de BC, les contraintes sont inclinées de ϕ, dans le sens opposé au poinçonnement. On supposera une répartition linéaire de ces contraintes. Soit σ_t la composante tangentielle de la contrainte en M, milieu de BC. L'équilibre des composantes verticales des forces appliquées au bloc ABCD donne :

$$\gamma HB + qB = p_o \cdot B + 2\,\sigma_t \cdot H$$

Le poids étant négligeable devant les autres forces mises en jeu, on déduit :

$$\frac{\sigma_t}{q} = \frac{1 - \frac{p_o}{q}}{2} \cdot \frac{B}{H}$$

Des valeurs données à la fig. (3.3) du rapport $\frac{p_o}{q}$, on déduit les valeurs de $\frac{\sigma_t}{q}$: fig. (3.8). Connaissant q on peut en déduite σ_t, contrainte tangentielle moyenne, le long de BC.

3.3.2 Travaux théoriques :

3.3.2.1 Généralités

Il s'agit essentiellement de tentatives faites par TCHENG [106] et [107],

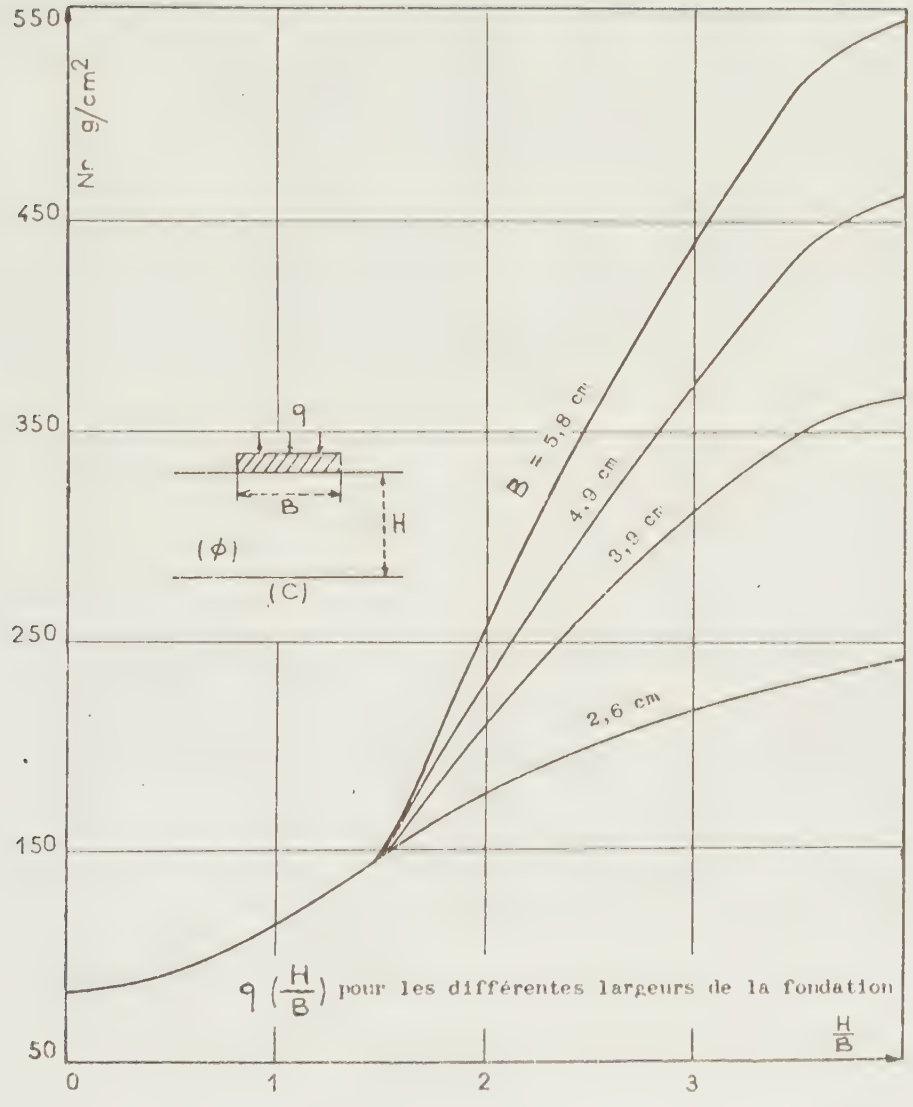


fig. 3.4 : Résultats des essais de TCHENG : pression portante du bicouche sable sur graisse en fonction de $\frac{H}{B}$. On remarquera que pour $\frac{H}{B} < 1.5$, la largeur de la fondation n'a plus d'influence sur la valeur de q (poinçonnement de la couche de sable)

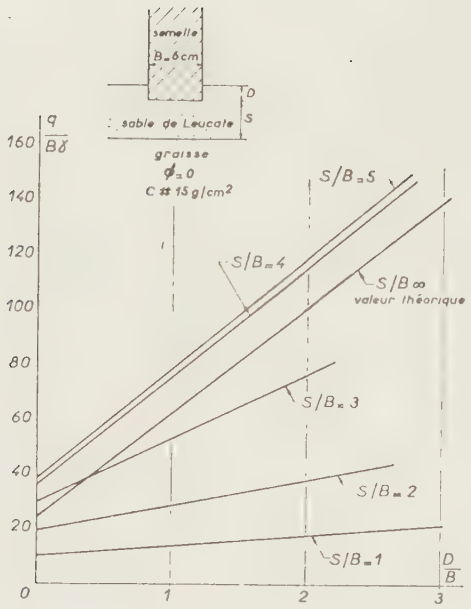
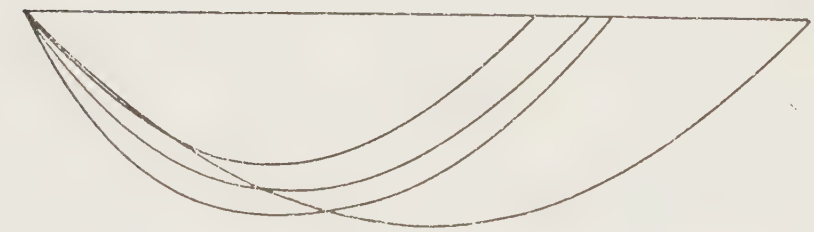
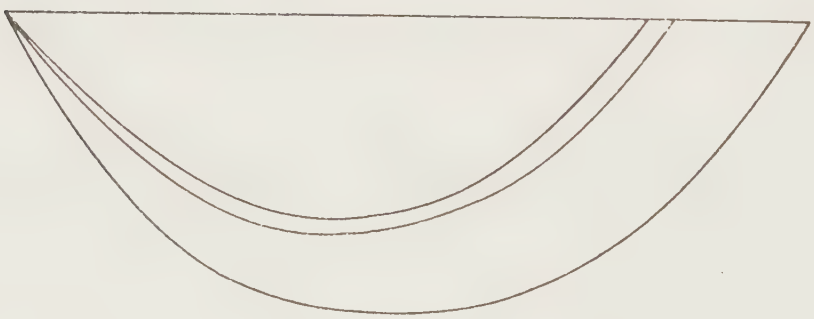


fig. 3.5 : Terme de force portante $\frac{q}{\gamma B}$ (= $2N_{c\gamma}$) en fonction de la profondeur de la base, selon LEBEGUE.



billes de verre



sable de Seine

fig. 3.6 : Forme de lignes de rupture relevées par TCHENG lors d'essais d'enfoncement de semelles dans des milieux homogènes, pour une même largeur de la fondation.

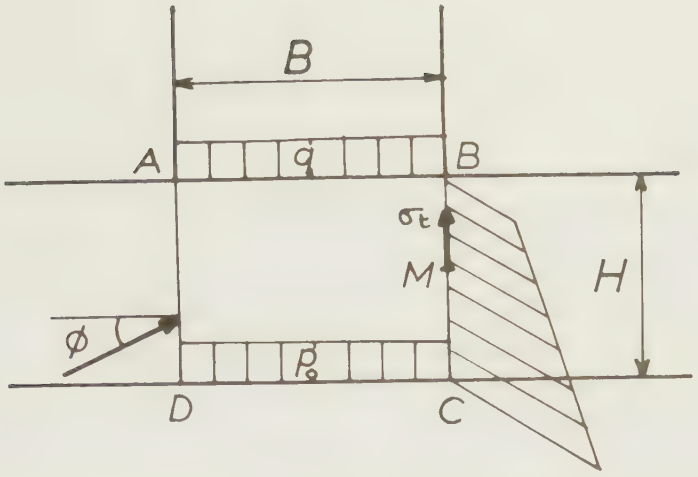


Fig.3.7. : Cas du poinçonnement de la couche supérieure ($\frac{H}{B} < 1.5$)

Répartition probable des contraintes σ_t .

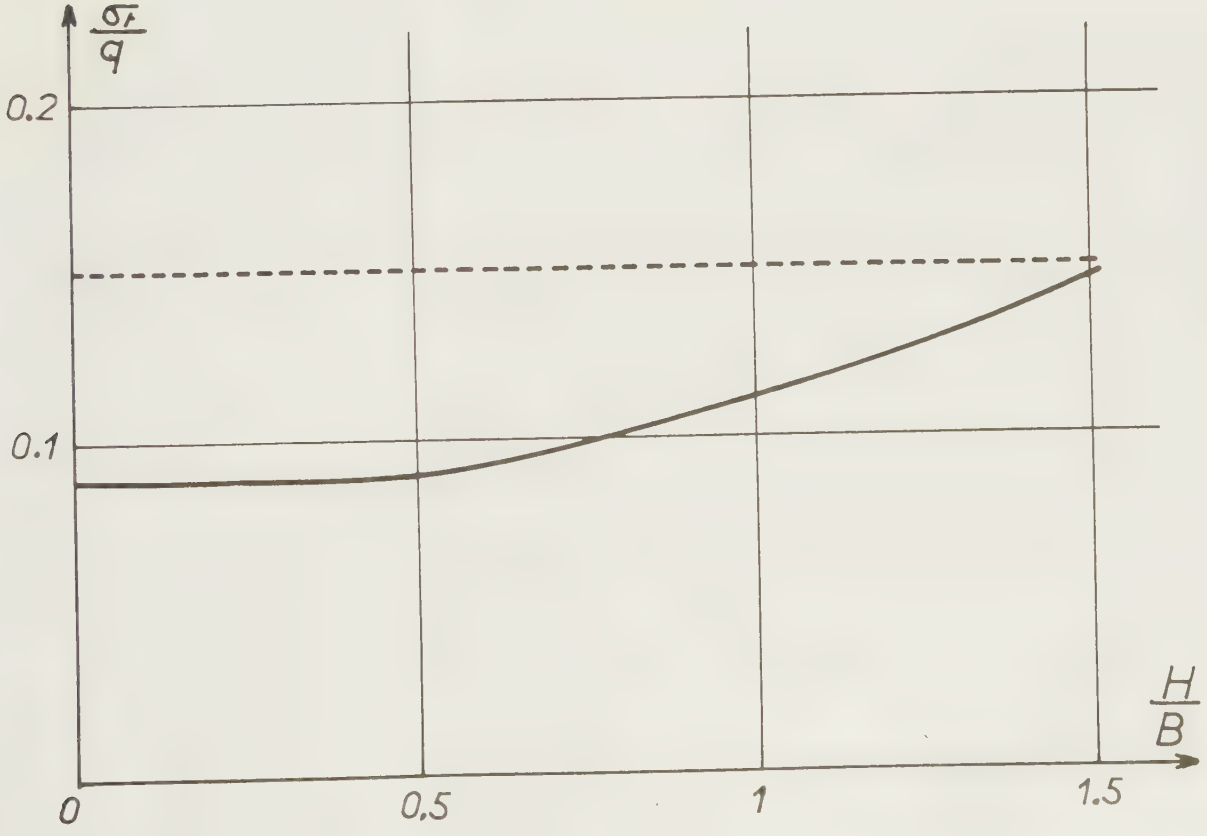


Fig.3.8. : Valeurs de la contrainte tangentielle moyenne σ_t, le long de BC

_____ : déduites à partir des résultats d'essais de TCHENG (cf. Fig. 3.3)

--------- : calculées en plasticité parfaite, à l'aide de l'équation 3.1.

pour $\phi = 36°$

et exploitées par MILOVIC [69] pour généraliser les essais sur modèles réduits effectués au CEBTP.

3.3.2.2 Hypothèses:

L'auteur cherche un modèle mathématique s'approchant au mieux de ses résultats expérimentaux. Après avoir échoué en employant successivement l'hypothèse de la butée sur AD et BC (fig. 3.7), et un calcul utilisant l'équilibre, par rapport à un point, des moments de blocs simples délimités par des lignes proches des lignes de rupture observées, TCHENG constate que la théorie de la plasticité offre des résultats satisfaisants mais aux trois conditions suivantes:

- considérer le milieu comme non pesant.
- prendre $p_o = (\pi + 2).c$.
- se cantonner au domaine $\frac{H}{B} < 1.5$.

En ce qui concerne le cas où $\frac{H}{B} > 1.5$, l'auteur propose deux formules empiriques qui approchent d'une manière satisfaisante les résultats de ses essais.

3.3.2.3 Déroulement des calculs

Pour le cas où $\frac{H}{B} < 1.5$ et d'après la fig. (3.9) on peut calculer : (équilibre limite du dièdre $A_o B_o B_2$)

a) la longueur de la bicaractéristique verticale $B_o B_2$, qui est égale à la hauteur maximale observée pour une ligne de glissement verticale lors d'un poinçonnement de la couche supérieure :

$$H_{max} = \frac{B}{2} \cdot \frac{e^{(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}).tg\,\phi}}{\sin\,(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})}$$

soit $H_{max} = 1.58\ B$ pour $\phi = 37°$, au lieu de 1.5 B valeur observée.

b) la contrainte tangentielle verticale en tout point de $B_o B_2$ soit σ_t (ici, en milieu non pesant, la répartition des contraintes est uniforme)

$$\sigma_t = q. \frac{\sin\phi.\ \cos\phi}{1 + \sin\phi}\ e^{-(\frac{\pi}{2} - \phi).tg\,\phi} \qquad (3.1)$$

d'où q car $q.B - p_o.B - 2H.\sigma_t = 0$ (3.2)

3.3.2.4 Résultats et conclusions

a) $\frac{H}{B} < 1.5$: la théorie de la plasticité nous donne :

$$q = (2 + \pi).c \cdot \frac{1}{1 - \frac{2H}{B} \cdot \sin \phi \cdot tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}) e^{-(\frac{\pi}{2} - \phi).tg \phi}}$$

$$\text{soit } q = \frac{(2+\pi).c}{1 - \alpha} \qquad (3.3)$$

TCHENG propose la formule semi-empirique :

$$q = \frac{0.9\ (2+\pi).c}{1 - \alpha} \qquad (3.4)$$

qui cadre mieux avec ses résultats. On remarquera que q peut se mettre sous la forme :

$$q = (1 + a).(2 + \pi).c$$

avec $a = \frac{\alpha - 0.1}{1 - \alpha}$

b) Pour $1.5 < \frac{H}{B} < 3.5$ TCHENG propose la formule empirique :

$$q = 1.38\ \frac{\gamma B}{2}\ N_\gamma \left[(\frac{H}{B})^{\frac{1}{2}} - (1.5)^{\frac{1}{2}} \right] + 1.775\ (2+\pi).c.\left[1.75 - 0.5(\frac{H}{B}) \right] .... \qquad .....(3.5)$$

c) Pour $\frac{H}{B} > 3.5$ La formule enpirique proposée se traduit par une courbe qui tend asymptotiquement vers la valeur $\frac{1}{2}\ \gamma B N_\gamma$ correspondant au terme de pesanteur du milieu pulvérulent homogène.

$$q = \frac{1}{2} \cdot (1-b).\gamma.B N_\gamma \qquad (3.6)$$

avec : $b = 13500\ e^{-(3.35 \frac{H}{B})}$

Ces différentes formules ont permis à MILOVIC de tracer des abaques [69] dont nous reproduisons un exemple en figure (3.10)

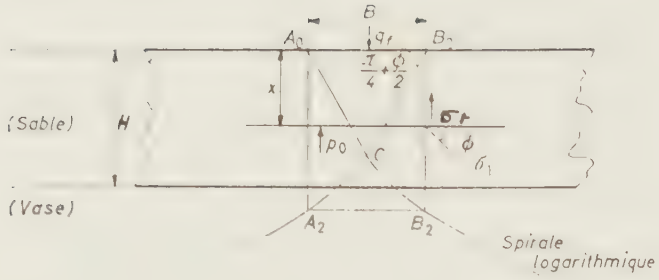


fig. 3.9 : Schéma de calcul de la force portante d'un milieu bicouche par la théorie de la plasticité avec $\frac{H}{B} < 1.5$, d'après TCHENG.

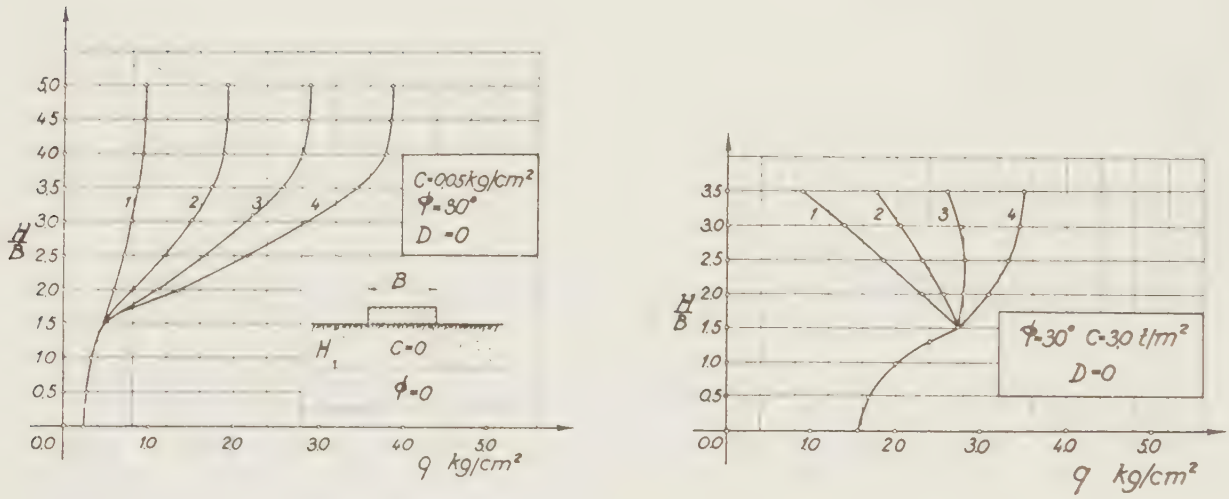
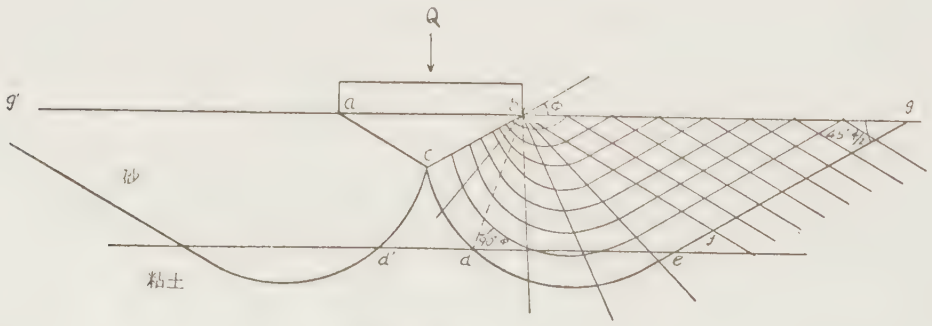


fig. 3.10 : Utilisation des formules semi-enpiriques de TCHENG, selon MILOVIC
(1) : B = 0.5m ; (2) : B = 1m ; (3) : B = 1.5m ; (4) : B = 2m.



(a) 辷り面と塑性域

fig. 3.11 : Schéma de rupture d'un sol bicouche sable sur argile selon KOÏZUMI.

3.3.2.5 Remarques personnelles

La première remarque concerne les calculs eux-mêmes, les deux suivantes l'utilisation des formules de TCHENG.

a) On vérifie que d'après la théorie proposée par TCHENG, $\frac{\sigma_r}{q}$ est une fonction de $\emptyset$ seulement (fig. 3.8, courbe pointillée).

Les essais prouvent cependant que $\frac{\sigma_r}{q}$ est une fonction de $\emptyset$ et de $\frac{H}{B}$ (fig. 3.8, courbe pleine). Il est caractéristique de constater que ces 2 courbes se coupent approximativement pour la valeur $\frac{H}{B} \simeq 1.58$ qui correspond au cas où les points A_2 et B_2 (fig. 3.9) sont situés à l'interface du bicouche. C'est donc, vraisemblablement, le seul cas où le schéma du poinçonnement qui permet d'établir la formule (3.1), est vérifié . Pour $\frac{H}{B} < 1.58$, le schéma de rupture subit sans doute des discontinuités au passage de l'interface. Il en résulte que $B_o B_2$ et CB_2 par exemple, ne sont pas des bicaractéristiques sur toute leur longueur. Les valeurs calculées sont alors d'autant plus proches des valeurs réelles que A_2 et B_2 sont proches de l'interface, c'est à dire que $\frac{H}{B}$ est proche de 1.58. (fig. 3.8).

D'autre part, nous avons vérifié que le terme de poussée (milieu pesant sans surcharge) du dièdre ABC sur BC (fig. 3.7) est tout à fait négligeable devant le terme $\hat{du}$ à la surcharge q (qui n'est autre que celui donné par la formule (3.1) et la courbe pointillée de la fig. 3.8). Ce qui justifie (tout au moins pour les essais sur modèles réduits) l'hypothèse de TCHENG d'une répartition uniforme des contraintes sur BC.

Nous avons également calculé les contraintes sur BC en faisant l'hypothèse de la butée ($-\emptyset$) sur BC. Les résultats ainsi obtenus sont bien trop grands, sans commune mesure avec les valeurs expérimentales. C'est sans doute ce qui a amené TCHENG à abandonner rapidement cette hypothèse de calcul.

b) L'analyse proposée par TCHENG distingue 3 comportements différents du sol, suivant les valeurs de $\frac{H}{B}$.

La théorie montre que les valeurs de $\frac{H}{B}$ qui limitent ces comportements différents (et en particulier $\frac{H\ max}{B}$) sont des fonctions de $\emptyset$. En les prenant constantes, comme le fait MILOVIC [69], on commet une imprudence : les valeurs limites 1.5 et 3.5 ne sont en effet valables que pour $\emptyset = 37°$.

c) En examinant les abaques dressés par MILOVIC [69] dont nous reproduisons deux exemples en figure 3.10, on peut constater que les formules (3.4), (3.5) et (3.6) proposées par TCHENG ne peuvent être appliquées que pour des valeurs très faibles de c. En effet, sur la figure (3.10) l'allure des courbes 1, 2, 3, et 4, avec $c = 0.5\ t/m^2$, semble logique. Il n'en est pas de même pour les courbes 1, 2, et 3, avec $c = 3t/m^2$.

Ces trois courbes correspondent au cas où la couche pulvérulente a des propriétés mécaniques moins bonnes que le substratum purement cohérent. Il semble alors illogique de vouloir améliorer la pression portante de la couche sous-jacente en augmentant (jusqu'à H = 1.5B) l'épaisseur de la couche pulvérulente, toutes choses restant égales par ailleurs.

En tout cas, un tel phénomène n'apparaît ni dans nos résultats (Annexe II, abaque n° 28), ni dans ceux de CARIOU et CAZENAVE (fig. 3.15).

En conclusion, les formules semi-empiriques ou empiriques de TCHENG ne semblent s'appliquer que pour des caractéristiques mécaniques du sol très proches de celles des matériaux qui ont servi aux essais dont ces formules sont tirées. C'est à dire ϕ proche de 37° et $c < 1t/m^2$, ce qui limite sensiblement leur domaine d'application.

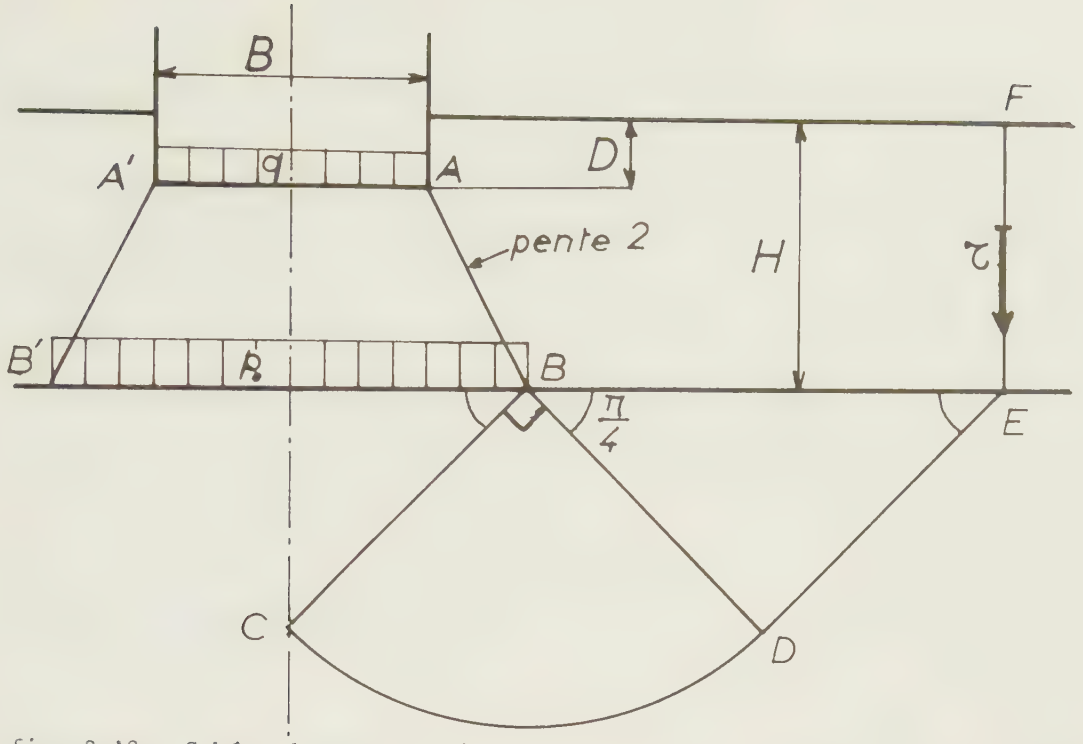


fig. 3.12 : Schéma de rupture d'un sol bicouche sable sur argile selon YAMAGUCHI.

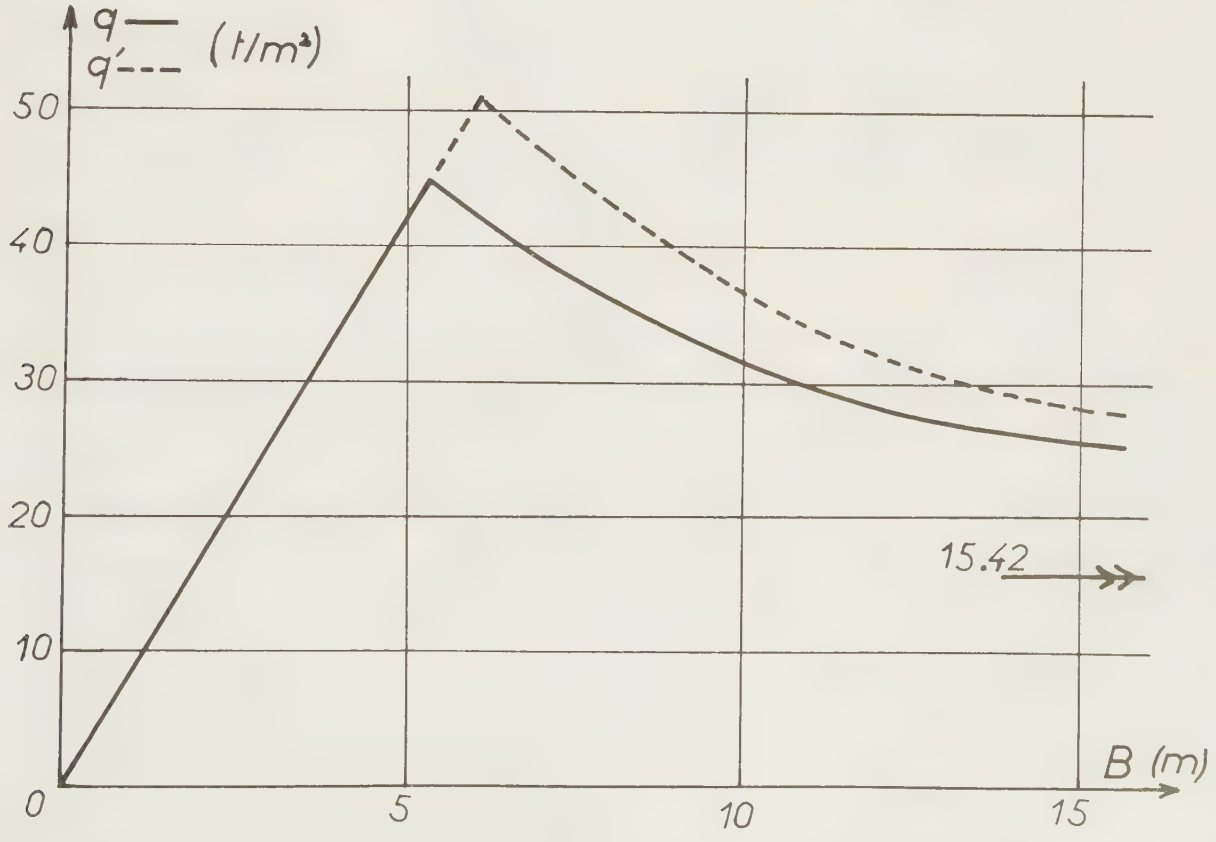


fig. 3.13 : Pression portante d'un sol bicouche sable sur argile selon YAMAGUCHI.

q' : avec un frottement suivant EF
q : aucun frottement suivant EF
avec : H = 10m ; $\phi = 30°$; $\gamma = 1 t/m^3$; $c = 3 t/m^2$

3.4 LES TRAVAUX DE KOÏZUMI

3.4.1 Généralités :

Il s'agit de 2 articles publiés en japonais [43] et [44] où est exposée une méthode de calcul de la force portante limite d'un sol bicouche sable sur argile.

3.4.2 Hypothèses :

a) L'auteur considère que la couche inférieure n'est intéressée que lorsque $\frac{H}{B} < 2$. Au delà, il conseille d'utiliser la formule classique de TERZAGHI [ ].

b) Dans le cas où $\frac{H}{B} < 2$, la ligne de glissement cdefg se compose d'une partie courbe cd et d'une partie droite eg. (voir fig. 3.11). Le coin triangulaire abc est supposé rigide, l'angle $\widehat{abc} = \phi$ (hypothèse de TERZAGHI [109]), le triangle bfg est une zone de Rankine, $\widehat{fgb} = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$

3.4.3 Déroulement des calculs :

L'auteur calcule d'abord, par une méthode approchée (spirale logarithmique par exemple) la contrainte sur bd, puis sur bc soit p.

Finalement : $q = 2p - \frac{\gamma B}{4} \operatorname{tg} \phi$

Puis il faut recommencer le calcul avec d'autres lignes cdefg et prendre la valeur minimale ainsi trouvée pour pression portante limite.

3.4.4 Résultats :

On peut constater que la méthode proposée conduisait à des calculs longs et pénibles à une époque où l'usage de l'ordinateur n'était pas encore répandu (1954). C'est sans doute pourquoi l'auteur ne publie de résultats que pour le cas particulier où H = 10m, $\phi = 30°$ et $c = 3t/m^2$ (voir fig. 3.17). Néanmoins, cette courbe présente une particularité intéressante : elle passe par un maximum pour une certaine largeur de la fondation. Nous verrons dans le paragraphe 3.7 que ce résultat peut se généraliser.

3.4.5 Remarques personnelles :

a) On peut reprocher à l'auteur de donner peu de détails sur ses hypothèses de calcul : Quelles sont les formes des lignes de glissement employées ? Combien de lignes ont-elles servi à déterminer chaque minimum de q calculé ?

b) L'auteur n'étudie que le cas $\frac{H}{B} < 2$. Or, nous avons vu dans le chapitre II,

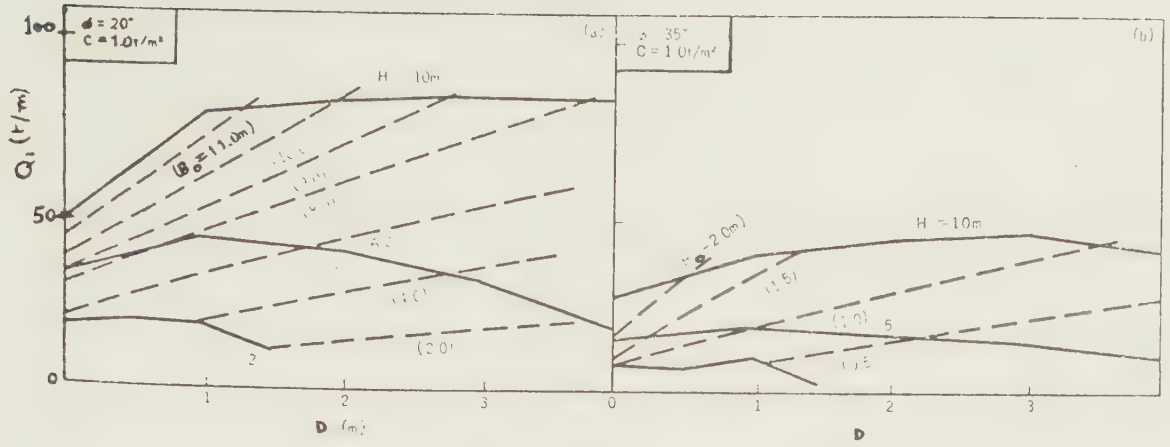


fig. 3.14 : Valeurs de $Q_1 = q_m \cdot B_o$, selon YAMAGUCHI (aucun frottement suivant EF) H, B_o et D ne sont pas indépendants.

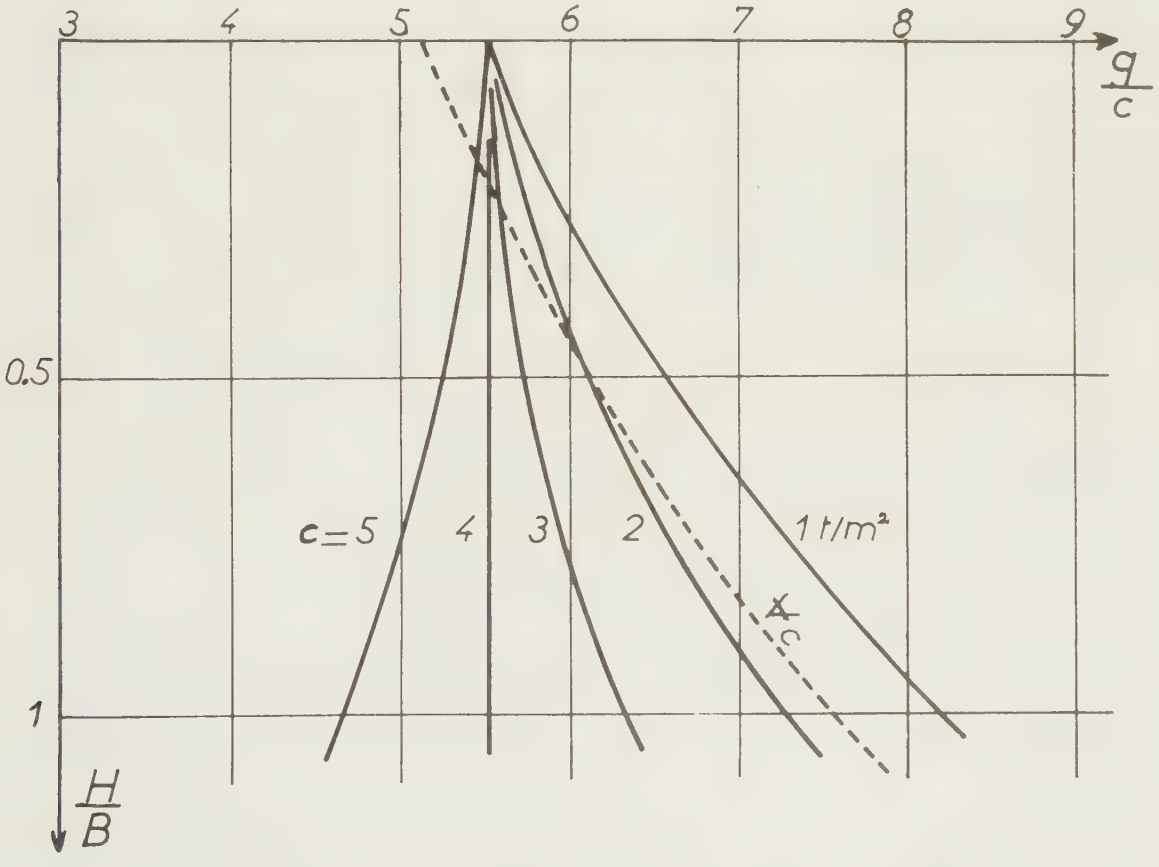


fig. 3.15 : Comparaison entre les résultats de CARIOU et CAZENAVE (traits pleins) et ceux donnés par les formules de TCHENG , (courbe pointillée) pour $\phi = 30°$

Remarque : Les valeurs de $\frac{q}{c}$ calculées d'après TCHENG ne dépendent pas de c pour $\frac{H}{B} < 1.5$ (formule 3.4).

figure 2.19, que dans le cas du schéma de rupture proposé par TERZAGHI, la spirale descend à une profondeur H''_o qui dépend de ϕ ($H''_{\phi=0} \simeq 1.8$ pour $\phi = 40°$). Il aurait donc fallu fixer une limite pour $\frac{H}{B}$ qui fut une fonction de ϕ et du type de ligne de glissement considéré.

c) La valeur $\underline{22.3 tm^2}$ proposée par l'auteur pour l'asymptote horizontale ne semble pas correspondre à la réalité. Logiquement, pour B infini, le rapport $\frac{H}{B} = 0$ et la force portante limite du sol se réduit à celle de la couche inférieure, soit 5.14 c. Soit ici: $5.14 \times 3 = \underline{15.42 t/m^2}$ ou en toute rigueur, puisque l'auteur emploie le schéma de TERZAGHI : $5.7 \times 3 = \underline{17.1 t/m^2}$

3.5 LES TRAVAUX DE YAMAGUCHI [115].

3.5.1 Généralités : Le but de cette recherche théorique est de fournir à l'ingénieur une formule pratique, directement applicable à toutes les formes de fondations semi-enterrées reposant sur un sol bicouche sable sur argile. Nous nous bornerons à analyser ici les résultats qui ont trait aux semelles filantes, sans tenir compte des facteurs de forme et coefficients de sécurité empiriques qui sont également proposés par l'auteur, en se fondant sur les travaux de TERZAGHI et PECK [110].

3.5.2 Hypothèses :

a) Le schéma proposé à la rupture est le suivant (fig. 3.12) : la contrainte q sous la semelle AA' se transmet à l'interface sur une longueur BB' telle que les segments A'B' et AB aient pour pente 2. Dans l'argile, le schéma est celui de la plasticité parfaite.

b) Il est envisagé une remontée possible du sable lors de la rupture, et un frottement τ, le long de deux droites verticales EF.

c) Enfin, lorsque la couche d'argile se trouve à une trop grande profondeur pour être concernée par la rupture de la couche supérieure, l'auteur adopte les valeurs de la force portante limite de TERZAGHI, correspondant aux caractéristiques mécaniques de la couche supérieure.

3.5.3 Déroulement des calculs :

Si le sable est seul concerné par la rupture, on prendra la pression portante $q_1 = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma D N_q$ (3.7)

Par contre, si le schéma de rupture est celui de la figure (3.12), on calcule p_o, pression à l'interface et on équilibre les forces appliquées au trapèze ABB'A'. Ce qui conduit à la pression portante :

$$q_2 = \left[(\pi + 2).c + \gamma.D \right].\left(1 + \frac{H-D}{B} \right) \qquad (3.8)$$

Des calculs analogues ont été menés dans le cas où l'on admet l'hypothèse d'une remontée du sable, et donc d'un frottement τ suivant EF. On suppose alors que la butée est mobilisée sur EF et la composante tangentielle de la contrainte inclinée de ϕ sur EF est: $\tau = \gamma.z.K_p.\ tg\ \phi = \gamma K_{pv}$ où K_p est le coefficient de butée que YAMAGUCHI prend égal à 3, $\forall\ \phi$, de même qu'il prend $tg\phi = 0.5$. Dans ces conditions le terme q_2 est modifié en :

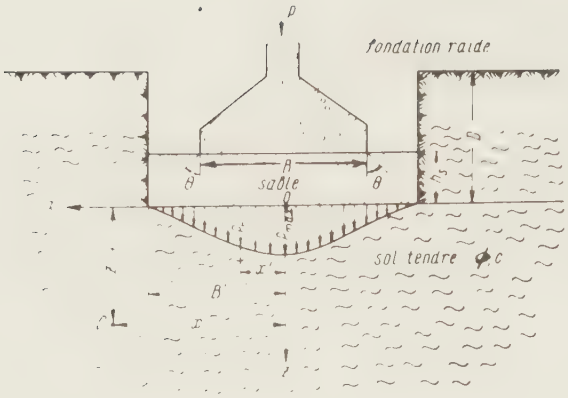


fig. 3.16 : Amélioration de la capacité portante d'un sol médiocre par interposition d'un "coussin" de sable, selon TOCHKOV.

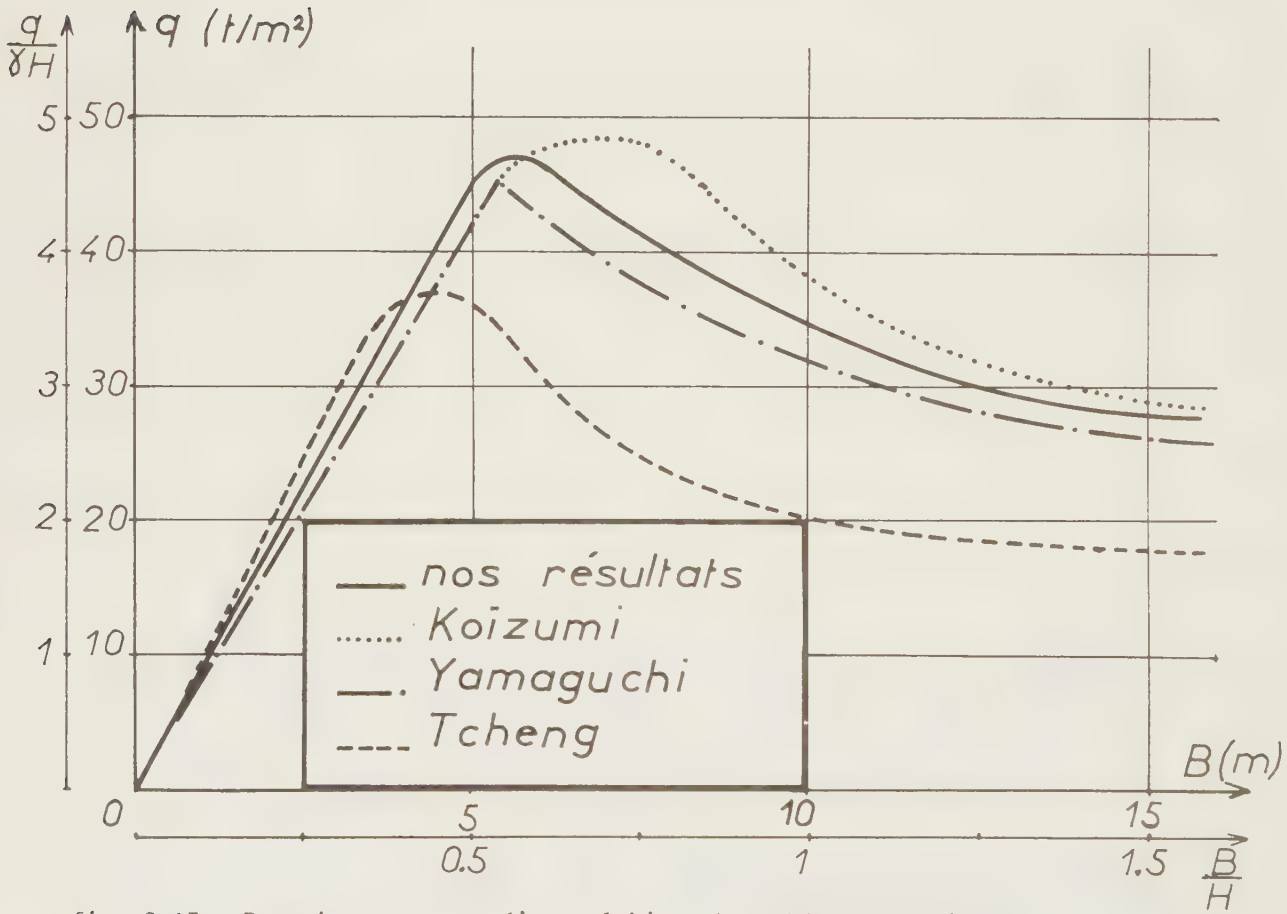


fig. 3.17 : Pression portante d'un sol bicouche sable sur argile :

Comparaison des résultats donnés par différents auteurs pour $\phi = 30°$, $c = 3t/m^2$, $H = 10m$, $\gamma = 1t/m^3$.

La courbe représentant nos résultats est valable également dans les coordonnées adimensionnelles $\frac{q}{\gamma H}$ et $\frac{B}{H}$, pour $\phi = 30°$ et $\frac{c}{\gamma H} = 3.33$

$$q'_2 = \left[(\pi + 2)c + \gamma.D + \frac{\gamma.H^2}{2(B+H-D)} \right] . \left(1 + \frac{H-D}{B} \right) \qquad (3.9)$$

3.5.4 Résultats :

YAMAGUCHI ne propose pas une limite plus ou moins empirique pour l'emploi de q_1 et q_2, à la manière de KOÏZUMI, mais il admet pour la pression portante limite du sol :

$$q = \inf (q_1, q_2) \qquad (3.10)$$

ou bien :

$$q' = \inf (q_1, q'_2) \qquad (3.11)$$

Si l'on porte, comme l'auteur, les résultats dans un graphique donnant q en fonction de B : fig.(3.13) les courbes représentatives des équations (3.10) et (3.11) sont composées de 2 parties : un segment de droite pour $B < B_o$ et un arc d'hyperbole équilatère pour $B > B_o$, représentant respectivement les équations (3.7), et [(3.8) ou (3.9)].

On constate que ces courbes admettent toujours un maximum, situé à l'intersection des deux branches de courbe. C'est à dire qu'il existe toujours une largeur optimale B_o de la fondation pour laquelle la pression portante limite q_m est maximale. Il est alors intéressant de connaître la force portante $Q_1 = q_m . B_o$ en fonction de H et de D : fig.(3.14) et calculée suivant l'équation (3.10).

3.5.5 Remarques personnelles :

a) L'apport le plus intéressant de ces travaux est d'avoir montré l'existence d'une force portante maximale pour une certaine valeur B_o de la largeur de la fondation. Et ceci pour tous les sols bicouches sable sur argile. En réalité, il est certain que l'allure du maximum de la courbe représentative de la figure(3.13) est plus "arrondie". En effet pour YAMAGUCHI on passe sans transition du schéma de rupture classique dans un milieu homogène pulvérulent au schéma de la fig.(3.12). Et la valeur $B = B_o$ correspond donc au cas où la ligne de glissement du schéma de rupture en milieu homogène est tangente à l'interface du bicouche.

TCHENG, par ses essais, a montré [106], qu'il y avait transition continue entre le schéma de rupture de type "sol homogène" et le poinçonnement de la couche supérieure. La valeur optimale B_o de B est donc, dans la réalité, sans doute légèrement supérieure à celle proposée par YAMAGUCHI : Il convient de voir à ce sujet la comparaison entre les résultats de KOÏZUMI et ceux de YAMAGUCHI sur la fig.(3.17)

b) Il n'est pas dans le sens de la sécurité de prendre en compte une force de frottement le long de EF : fig. (3.12). Si la courbe basse (trait plein) de la fig. (3.13) donne des valeurs par défaut, il est probable que la courbe haute (trait pointillé) donne des valeurs par excès.

c) D'autre part, YAMAGUGHI propose la valeur 1.5 pour K_{pv} , s'il y a soulèvement du sable le long de EF. On pourrait plus correctement écrire : $\tau = \gamma.z.K_{pv}$

avec : $K_{pv} = \cos \phi . \sin \phi$ dans l'hypothèse de la butée $\delta = + \phi$, ou $(K_{pv})_{max} = \operatorname{tg} \phi$ dans le cas de la butée présentant un δ optimal (tel que τ soit maximal).
Pour les sables, $\phi \leqslant 45°$, donc $K_{pv} \leqslant 0.5$ ou 1 selon l'expression choisie pour K_{pv}.
A ce sujet, on consultera la thèse de Docteur-Ingénieur de TRÂN-VÔ-NHIÊM pp. 296 à 299. [113]

d) La figure (3.14) semble indiquer que la profondeur D de la base de la fondation intervient peu dans la valeur de la force portante Q_1 ; (voir à ce sujet notre conclusion au § 3.7.2).

e) Il est intéressant de constater que la construction sur radier est à recommander dans le cas où la couche sableuse a des propriétés mécaniques médiocres par rapport au substratum argileux (fig. 3.14.a). Par contre dans le cas (fig.3.14.b) où la couche supérieure sableuse est bien meilleure que la couche inférieure argileuse, on conseillera plutôt une construction sur semelles filantes ($L \geqslant 6B$).

3.6 AUTRES TRAVAUX :

3.6.1 Formule de SOWADA [98]

Cet auteur Est-Allemand étudie un problème proche de celui qui nous préoccupe dans ce chapitre : la couche supérieure est pulvérulente, mais la couche inférieure comporte une cohésion c et un angle de frottement ϕ_2 . Il cherche la hauteur minimale H_m, de la couche supérieure pour laquelle se produit une rupture par poinçonnement vertical, en s'appuyant sur un schéma de rupture proposé par OHDE [72]. Celui-ci considère que la poussée est mobilisée le long de la surface poinçonnée, ce qui conduit à l'équation :

$$W + \gamma_1 . B . (H_m - D) - \gamma_1 . K_{ah} . H_m^2 . tg\,\phi = B . \left(\tfrac{1}{2}\,\gamma_2 . B . N_\gamma + \gamma_1 . H_m . N_q + c . N_c\right) \qquad (3.12)$$

avec W : poids propre de la fondation

γ_1 et γ_2 : poids volumiques des couches supérieure et inférieure , respectivement.

K_{ah} : composante horizontale du coefficient de poussée K_a dans la couche supérieure.

On peut prendre : $\dfrac{1}{\sqrt{K_{ah}}} \simeq \sqrt{1 + tg^2\,\phi} + 0.1\ tg\,\phi$

L'équation (3.12) du second degré en H_m, se résoud facilement.

Remarques :

a) On doit constater que SOWADA ne cherche pas à calculer la force portante limite du sol, car TCHENG a montré que le schéma faisant apparaître un poinçonnement est insuffisant ($\frac{H}{B} < 1.5$ seulement). Il cherche seulement la sécurité vis à vis du cas de rupture le plus défavorable, qui est bien le poinçonnement, du moins dans le cas d'une couche dure reposant sur une couche molle (voir abaque (n° 28) de l'Annexe II)

b) On se souvient, que TCHENG, dans sa thèse a fait une tentative de calcul infructueuse en considérant la butée mobilisée le long des lignes de ruptures verticales dans le sable. Ici SOWADA propose de prendre la poussée. Il est certain que cette hypothèse est dans le sens de la sécurité.

3.6.2 Calculs de CARIOU et CAZENAVE

Ces calculs ont été effectués dans le cadre d'un rapport de fin d'études de l'Ecole Centrale de Paris [14]. Non encore publiés sous une forme définitive, ils ne sont accompagnés que de résultats très incomplets.

Il s'agit d'un calcul, par la méthode du cercle de glissement, de la force portante limite d'un sol bicouche quelconque. Méthode très analogue à celle développée dans le chapitre II, mais plus compliquée, du fait que le cercle est découpé en un certain nombre de tranches verticales. Dans chaque tranche, on résoud graphiquement les équations de l'équilibre. L'emploi systématique de l'ordinateur permet de tester un grand nombre de cercles, de diviser chaque cercle en un grand nombre de tranches et de traiter des résolutions graphiques complexes. Une description ainsi que d'autres exemples d'emploi de cette méthode (barrages,gabions) figurent dans la thèse de A.M SENS [87] qui dirigea les travaux de CARIOU et CAZENAVE.

Dans le cas qui nous intéresse ici, les auteurs n'ont calculé la force portante limite que pour $\frac{H}{B} \leqslant 1$. Néanmoins, leurs résultats peuvent être rapprochés de ceux donnés par les formules semi-empiriques de TCHENG [107] : fig. (3.15). L'examen de cette figure tend à confirmer les conclusions déjà formulées à propos des formules de TCHENG (cf § 3.3.2.5.). Ces dernières ne s'approchent de la réalité que pour des valeurs faibles de la cohésion c de la couche inférieure.

3.6.3 Travaux de TOCHKOV :

Le problème traité dans cette communication [111] est voisin de celui qui nous préoccupe ici : il s'agit de la force portante limite d'un sol argileux dont on a essayé d'améliorer les performances en interposant une couche de sable entre le sol et la fondation [fig. (3.16)], comme il est courant de le faire en Bulgarie. L'hypothèse essentielle de ce calcul est le comportement élastique de ce "coussin" de sable. Après avoir déterminé, sur un modèle photoélastique, la répartition des contraintes à l'interface (fig. 3.16), on choisit comme critère, pour obtenir la limite de la force portante, l'apparition du foyer des zones plastiques dans le milieu argileux. Cela appelle deux remarques :

a) Une zone plastique (contenue) peut très bien exister dans un sol sans qu'il y ait pour autant écoulement plastique. (voir RADENKOVIC et SALENÇON [77]) Ici, donc, l'apparition du foyer des zones plastiques dans la couche inférieure, ne peut être choisi comme critère de rupture du sol de fondation.

b) Les expériences de TCHENG ont montré qu'il n'est pas correct de considérer la couche supérieure comme élastique puisqu'elle est poinçonnée par la fondation, lors de la rupture.

Ainsi est-il probable que si l'on n'impose pas au sable de conserver un comportement élastique, les foyers des zones plastiques apparaîtraient dans le sable, sous les bords de la fondation, et non dans le sol tendre sous-jacent.

3.7 CONCLUSION DU CHAPITRE III

3.7.1 Comparaison des résultats proposés par les différents auteurs :

Après avoir analysé les divers travaux suscités par le problème du bi-couche sable sur argile, il nous semble que les résultats les plus intéressants soient ceux de TCHENG, de KOÏZUMI et de YAMAGUCHI. Nous avons porté sur la fig. (3.17) les valeurs de la pression portante proposées par ces auteurs dans le cas où $\phi = 30°$, $c = 3t/m^2$, $H = 10m$ et $\gamma = 1t/m^3$, et nous y avons fait également figurer les valeurs que nous proposons au Chapitre II et à l'Annexe II de ce mémoire. Ici encore, nous pouvons constater que, bien que les essais de TCHENG restent la base de toute étude de ce problème, les valeurs issues des formules semi-empiriques de cet auteur s'écartent sensiblement des autres résultats et ceci dès que la cohésion de la couche inférieure dépasse environ $1t/m^2$.

La figure (3.17) dénote également une concordance intéressante entre nos valeurs et les résultats des deux auteurs japonais. On remarquera à ce propos :

a) Cette concordance n'a pu être prouvée sur d'autres exemples numériques, car il n'existe pas d'autres valeurs fournies par ces auteurs.

b) La courbe tracée à l'aide de nos résultats est beaucoup plus générale que ne l'indique les valeurs numériques portées sur les axes (q en t/m^2 et B en m). En réalité, cette courbe représente (de par la nature même de nos calculs) toute une classe de résultats valables pour $\phi = 30°$ et $\frac{c}{\gamma H} = 3.33$, en portant sur les axes les paramètres adimensionnels $\frac{q}{\gamma H}$ et $\frac{B}{H}$ (voir fig. 3.17).

3.7.2 Largeur optimale, pression portante maximale :

La réalité de ces deux notions est affirmée par la totalité des auteurs cités dans la figure (3.17). Les essais de TCHENG, exprimés dans les mêmes axes de coordonnées, corroborent cette existence (fig. 3.18).

Il ne faut cependant pas se leurrer sur l'importance de l'existence d'une largeur optimale B_o. Cette largeur n'est optimale que pour la pression portante q et non pour la force portante $Q = qB$ notion primordiale pour l'ingénieur. Il est donc peu intéressant de porter les valeurs de $Q_1 = q_m . B_o$ comme l'a fait YAMAGUCHI (fig. 3.14) sinon pour prouver le peu d'influence de D (profondeur d'ancrage) sur Q_1. On peut tracer comme sur la figure (3.19), avec les mêmes valeurs numériques que sur la figure (3.17), la courbe donnant $Q = qB$ en fonction de B, à l'aide de nos valeurs. On constate que cette courbe, qui pour $B < B_o$ est une parabole,

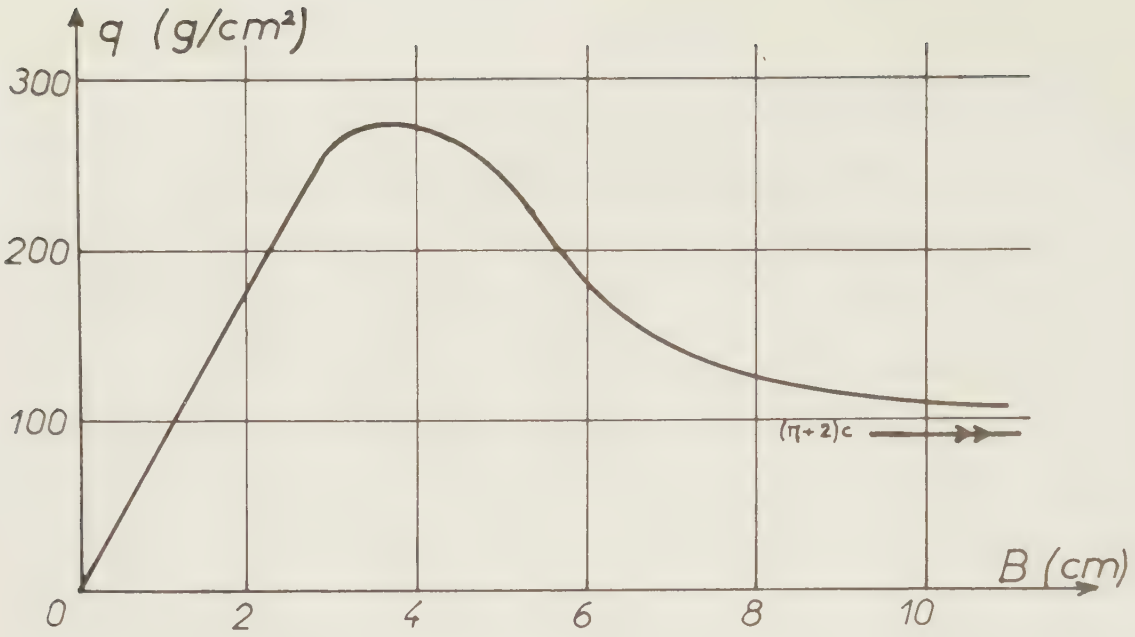


fig. 3.18 : Résultats d'essais de TCHENG. Cas d'un bicouche de sable ($\phi = 36°$, H = 10 cm, $\gamma = 1.6$ g/cm^3) sur graisse (c = 17 g/cm^2)

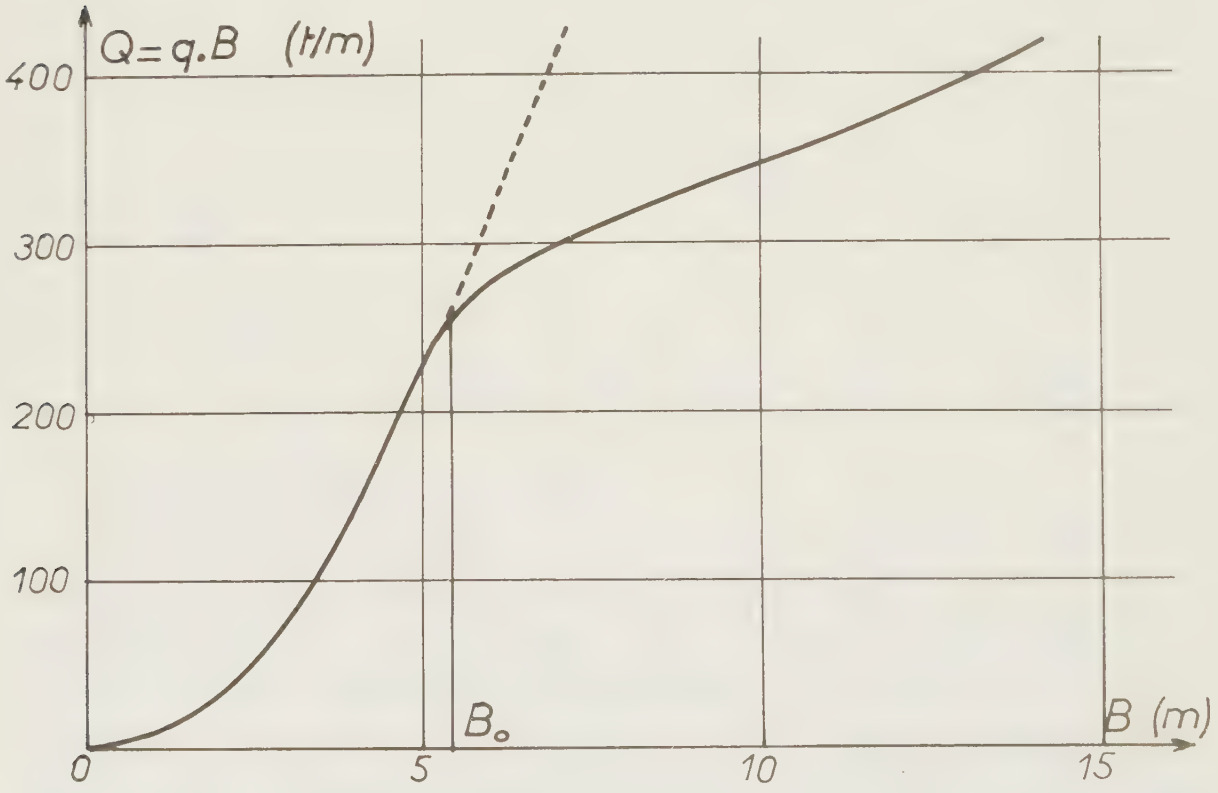


fig. 3.19 : Force portante d'un sol bicouche de sable ($\phi = 30°$, H = 10m, $\gamma = 1$t/m^3) sur argile (c = 3t/m^2) d'après nos calculs.

(En pointillé, la courbe obtenue dans un milieu pulvérulent homogène $\phi = 30°$, $\gamma = 1$ t/m^3).

s'infléchit sensiblement à partir du voisinage de cette valeur. B_o ne correspond donc pas à un maximum de la force portante mais à une valeur à partir de laquelle il devient, pour l'ingénieur, moins avantageux (vis à vis de la force portante) d'augmenter la largeur de la fondation.

3.7.3 Influence d'une surcharge, cas des fondations profondes

Un schéma très courant, lorsqu'on choisit pour un ouvrage d'avoir recours à des fondations profondes, est celui de la figure (3.20), où la semelle repose sur une couche sableuse ou graveleuse compacte, mais de faible épaisseur qui surmonte une couche argileuse de qualité médiocre. Il est alors intéressant de calculer la pression portante limite de pointe en nous servant des résultats du présent chapitre.

On sait que :

- pour $B < B_o$ (environ) la couche inférieure n'est pas concernée par la rupture. Aussi on peut écrire: $q_{1D} = \frac{1}{2} \gamma . B N_\gamma + \gamma' D . N_q = q_1 + \gamma' D N_q$

- pour B infini (asymptote)

$$q_{3D} = (\pi + 2).c + \gamma' D = q_3 + \gamma' D$$

Il en résulte que pour les valeurs intermédiaires, $B > B_o$, on a certainement :

$$q_{2D} = q_2 + \alpha . \gamma' D N_q$$

où le coefficient α est une fonction décroissante de B :

$$\frac{1}{N_q} < \alpha \leqslant 1 \qquad \text{lorsque}$$

$$\infty > B \geqslant B_o$$

Il suffit donc de calculer α , et pour cela nous n'avons que le choix des méthodes proposées par les différents auteurs. Si nous choisissons celle de YAMAGUCHI (§ 3.5), c'est que les calculs y sont explicites et les résultats néanmoins intéressants. La formule (3-8) valable pour $B > B_o$ se transforme ainsi :

$$q_2 = \left[(\pi + 2).c \right] . (1 + \frac{H}{B}) \quad \text{sans surcharge}$$

$$q_{2D} = \left[(\pi + 2).c + \gamma' D \right] . (1 + \frac{H}{B}) \quad \text{lorsqu'il existe une surcharge } \gamma' D. \text{ D'où:}$$

$$q_{2D} - q_2 = \alpha . \gamma' D N_q = \gamma' D . (1 + \frac{H}{B})$$

la fonction $\alpha (B)$ est donc déterminée.

En résumé nous proposons, pour calculer la pression portante limite de pointe d'une fondation profonde (2 dimensions), connaissant les valeurs de la pression

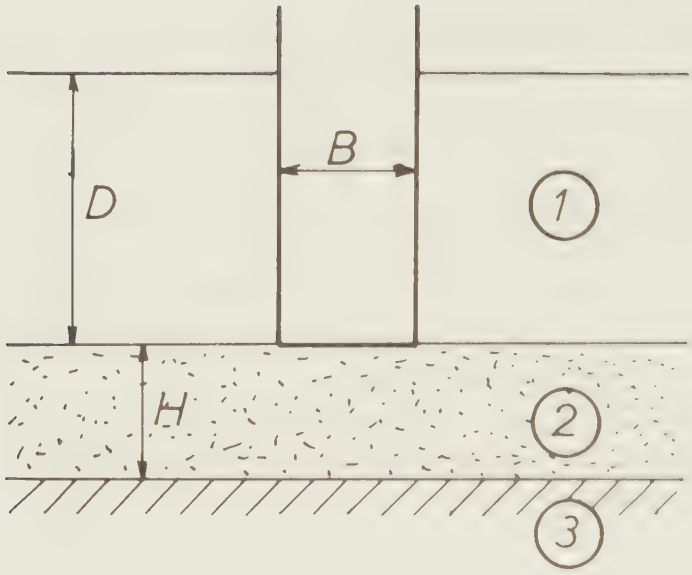


fig. 3.20 : Cas des fondations profondes

① : sol quelconque $\gamma' \neq 0$

② : sol pulvérulent $c = 0$, γ et $\phi \neq 0$

③ : sol cohérent $\phi = 0$, γ et $c \neq 0$

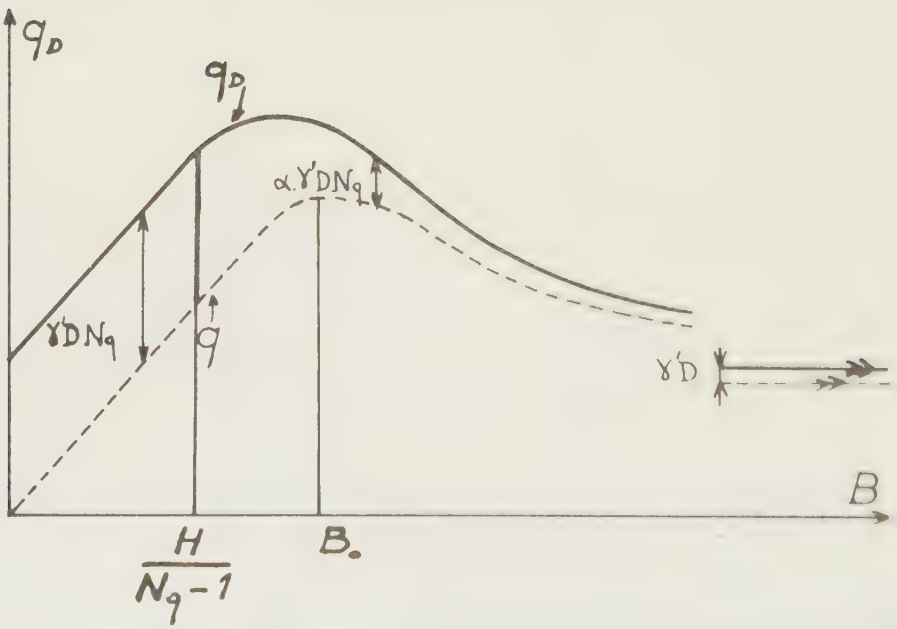


fig. 3.21 : Pression portante de pointe q_D, d'une fondation profonde, déduite de la pression portante q du sol bicouche ② + ③ (fondation superficielle).

limite q pour la fondation superficielle correspondante :

$$q_D = q + \alpha . \gamma' D N_q \qquad (3\text{-}13)$$

avec $\alpha = 1$ pour $\frac{B}{H} < \frac{1}{N_q - 1}$; et $\alpha = \frac{1}{N_q}.\left(1 + \frac{H}{B}\right)$ pour $\frac{B}{H} > \frac{1}{N_q - 1}$

On obtient ainsi (figure 3.21) une courbe q_D fonction de B déduite de la courbe q fonction de B , tout à fait analogue à celle qu'obtient KOÏZUMI [43 , fig.3.26] par un calcul direct.

On remarque que la valeur charnière $B = \frac{H}{N_q - 1}$ n'est ni égale à B_o (en général) ni située au maximum de la courbe q_D (B).

Remarques :

On peut appliquer l'équation (3.13) tant qu'on se situe sur la partie linéaire de la courbe pression de pointe-enfoncement. On sait alors qu'en employant la formule de TERZAGHI on se trouve largement dans le sens de la sécurité, comme l'indique GRESILLON [31 , formule 3 p.22] . Il n'en est évidemment plus de même si l'enfoncement D est grand devant B, et si le palier de la courbe pression- enfoncement est atteint. La valeur de ce palier dépend essentiellement de la compacité du sable. Il serait donc prudent, d'après GRESILLON de ne pas employer la formule de TERZAGHI, donc la formule (3.13) au delà de $q_D = 50$ kg/cm^2.

D'autre part, la forme adoptée pour écrire la formule (3.13), n'interdit pas de choisir comme on l'entend les valeurs de q.

En particulier, on pourra, pour des pieux circulaires, faire intervenir un coefficient de forme.

CHAPITRE IV

FORCE PORTANTE D'UNE COUCHE DE SOL D'EPAISSEUR LIMITEE REPOSANT SUR UNE ASSISE RIGIDE

PLAN DU CHAPITRE IV

4.1 - Notations du chapitre IV p.91
4.2 - Introduction p.92
4.3 - Travaux expérimentaux p.93
4.4 - Calcul de la force portante limite, en faisant l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire p.104
4.5 - Travaux utilisant la théorie du poinçonnement d'une plaque p.105
4.6 - Travaux de SALENÇON p.114
4.7 - Conclusion p.129

4.1 NOTATIONS DU CHAPITRE IV

B : largeur de la fondation .

B' : largeur de la charge uniforme à l'interface supérieure, pour YAMAGUCHI et TERASHI .

F_γ , F_c, F_q : $\frac{N_{\gamma H}}{N_\gamma}$, $\frac{N_{cH}}{N_c}$, $\frac{N_{qH}}{N_q}$ respectivement .

F'_γ , F'_c, F'_q : $\frac{N'_{\gamma H}}{N_\gamma}$, $\frac{N'_{cH}}{N_c}$, $\frac{N'_{qH}}{N_q}$ respectivement .

H : hauteur de la couche de sol .

K : coefficient adimensionnel tel que le maximum de la contrainte sous la fondation soit c (N_{cH} + K), pour M.A. SENS.

N_γ , N_c, N_q : coefficients de force portante (cas du milieu homogène semi-infini).

$N_{\gamma H}$, N_{cH}, N_{qH} : coefficients de force portante (cas de la couche d'épaisseur limitée. Interface parfaitement rugueux).

$N'_{\gamma H}$, N'_{cH}, N'_{qH} : coefficients de force portante (cas de la couche d'épaisseur limitée. Interface lisse).

Q : force portante limite du sol de fondation. Charge limite dans la théorie des charges limites.

c : cohésion d'un sol. Cission limite d'un matériau de TRESCA.

d : distance horizontale entre l'axe de la fondation et la tranchée.

m : coefficient d'adhérence à l'interface.

m' : coefficient d'adhérence sous la semelle.

p : pression sous la fondation .

p_o : pression sous la fondation (cas du massif semi-infini homogène).

q : pression portante limite .

q_o : pression portante limite (cas du massif semi-infini homogène).

q' : pression à l'interface supérieure, pour YAMAGUCHI et TERASHI .

q_v : composante verticale de q ($\delta \neq 0$) .

u, v : composantes suivant x et y de la vitesse de déformation .

x, y : direction verticale descendante et direction horizontale à $+\frac{\eta}{2}$, respectivement .

γ : poids volumique du matériau .

δ : angle avec la verticale de la force exercée par la fondation sur le sol.

ε : déformation .

$\dot{\varepsilon}$: vitesse de déformation .

ϕ : angle de frottement interne du matériau .

$\vec{v}$: vitesse de glissement à l'interface .

σ_T : contrainte tangentielle à l'interface .

σ_x , σ_y , τ_{xy} : composantes du tenseur-contrainte dans les axes xy .

4.2 INTRODUCTION

Le sol étudié dans ce chapitre est composé d'une couche d'épaisseur limitée, pouvant avoir des propriétés mécaniques quelconques et reposant sur un substratum que l'on supposera rigide. Ce cas particulier est intéressant car la formule classique de TERZAGHI suppose le massif semi-infini. En réalité, on peut le considérer comme tel si l'épaisseur H du sol meuble est grande devant la largeur B de la fondation. Mais à partir de quelle valeur du rapport $\frac{H}{B}$ les coefficients habituels ne seront-ils plus valables, et comment vont-ils varier ? Cette question a fait l'objet de nombreux travaux, d'abord expérimentaux, en FRANCE surtout, puis théoriques. La controverse de savoir si la force portante passe par un minimum ou bien diminue continuellement jusqu'à une valeur-palier quand $\frac{H}{B}$ augmente, a été close par les travaux de SALENÇON, exécutés suivant la théorie de la plasticité parfaite en en employant la méthode des caractéristiques. Mais pour l'ingénieur, le problème n'est pas résolu pour autant, car en fin de compte, tout va dépendre des propriétés mécaniques de l'interface sol-substratum. Il devra être particulièrement attentif aux cas (fréquents par exemple dans la vallée du Rhône) où une couche d'argile repose sur une assise graveleuse qu'on peut supposer rigide. Il existe alors une nappe captive dans le gravier et la pellicule d'argile au contact du gravier est en général considérablement altérée.

Remarque : Dans tout ce chapitre, nous distinguerons la plaque d'épaisseur limitée (de largeur finie, pouvant subir des déplacements latéraux) de la couche d'épaisseur limitée (de largeur infinie, ne pouvant subir aucun déplacement latéral).

"plaque"

"couche"

4.3. TRAVAUX EXPERIMENTAUX

4.3.1 Essais sur matériaux purement cohérents réalisés au C.E.B.T.P.

4.3.1.1 Généralités

Les travaux expérimentaux réalisés au C.E.B.T.P. de 1950 à 1954 ont eu pour origine l'étude sur modèles réduits de plusieurs problèmes réels ; en particulier l'étude pour la Société des Phosphates Tunisiens d'un dépôt de minerai en bordure d'un canal.

Mais les chercheurs débordèrent largement ces problèmes assez particuliers et s'intéressèrent à différentes formes de charge d'une couche de sol d'épaisseur limitée. Ces travaux donnèrent lieu à trois publications successives par HABIB [32], TCHENG [105], et HABIB et ŠUKLJE [33]. Alors que la première traite d'une charge rigide (cas qui nous intéresse tout particulièrement) et que la seconde fournit les résultats obtenus sur modèle réduit dans l'étude du problème cité plus haut et intéressant une compagnie minière tunisienne, la troisième contient une étude expérimentale très complète de la force portante limite d'une couche de sol vis-à-vis d'une charge souple.

4.3.1.2 Matériaux

Les essais d'une plaque rigide furent réalisés sur graisse consistante, ceux d'une charge souple sur la même graisse et sur une argile molle.

Caractéristiques mécaniques :

- graisse : $\phi = 0°$; $c = 12$ g/cm^2. Il faut opérer à température constante car la cohésion peut, en réalité, varier de 10 à 20 g/cm^2.

- argile molle : $\phi = 0°$; $c = 10{,}4$ g/cm^2.

Pour davantage de précisions, le lecteur pourra se reporter à la référence [33].

4.3.1.3 Appareillage. Mesures

Une cuve de 2 x 0,75 x 0,20 m à parois vitrées, contient le matériau, au sein duquel des témoins permettent de repérer les déplacements. Les déplacements à la surface sont mesurés par des comparateurs. Ceux des témoins par des prises de vue photographiques successives.

Le dispositif de chargement choisi [33, figure 13], permet de reproduire n'importe quelle répartition des charges à la surface du sol.

En pratique, et outre la semelle rigide, 8 répartitions de charges souples normales furent utilisées :

- répartition uniforme
- répartition triangulaire
- répartition parabolique convexe
- répartition "en gradins"
- répartition trapezoïdale
- répartition trapézoïdale concave
- répartition parabolique concave
- répartition mixte : triangulaire au bord, parabolique concave au centre.

Le frottement entre le matériau et les parois de la cuve est pratiquement éliminé par une couche de gomme arabique. Le frottement résiduel reste alors à mesurer [33, figure 14].

Le fond de la cuve est soit "rugueux" dans le cas des essais d'une charge rigide [32], soit rendu plus "lisse" par adjonction d'une surface revêtue de gomme arabique. Nous reviendrons au § 4.3.1.5 sur ces notions.

4.3.1.4 Résultats

Avec des matériaux présentant une cohésion faible, il est délicat de choisir un critère de rupture, la courbe donnant la pression sous la semelle en fonction de l'enfoncement ne présente pas, en effet, de palier, du moins pour des enfoncements relatifs faibles. Nous avons reproduit en figure 4-1 de telles courbes expérimentales, obtenues par HABIB lors d'essais avec des charges rigides. Néanmoins, on peut contourner cette difficulté en remarquant que la courbe représentant p, pression sous la semelle, en fonction du tassement relatif, pour une certaine valeur de $\frac{H}{B}$, se déduit par une

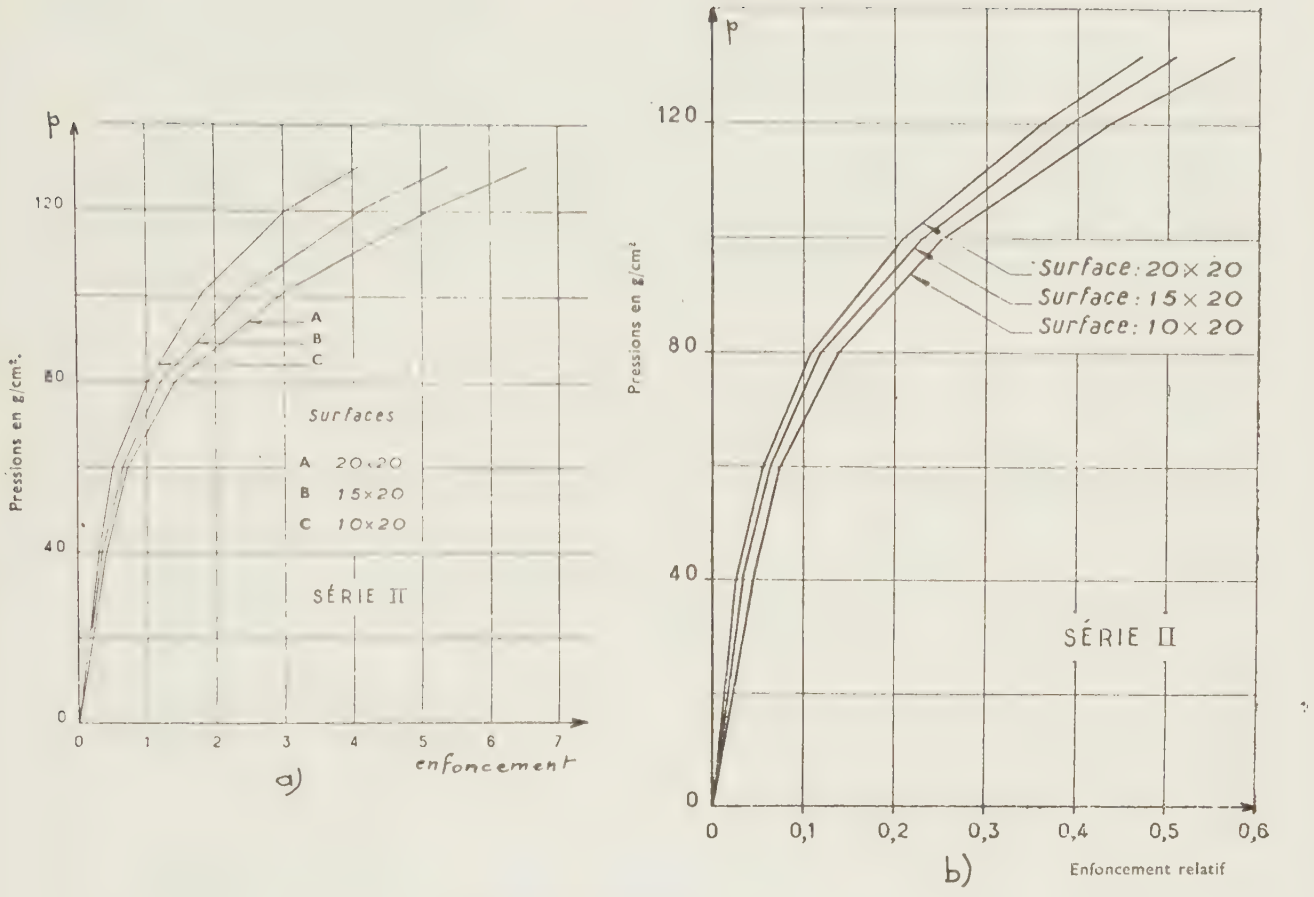


Fig. 4-1 : Essais de HABIB pour $\frac{H}{B} = \sqrt{\frac{2}{2}}$

a) Enfoncement réel ΔD, en fonction de p, pression exercée sur la semelle.

b) Enfoncement relatif $\frac{\Delta D}{H}$, en fonction de p.

Fig. 4-2 : Résultats des essais de HABIB :

Courbe expérimentale moyenne de $F_c = \frac{N_{ch}}{N_c}$, pour $\phi = 0°$.

affinité orthogonale, ayant pour axe celui des tassements relatifs, de celle obtenue dans les mêmes conditions sur une couche de matériau suffisamment épaisse pour être considérée comme semi-infinie. Si p est la pression exercée par la semelle, et q la valeur de p choisie pour pression portante limite, dans le cas où la couche a une épaisseur limitée H, p_o et q_o les mêmes grandeurs dans le cas du massif semi-infini, on peut donc écrire le rapport d'affinité :

$$\frac{p}{p_o} = \frac{q}{q_o} = \frac{\frac{q}{c}}{\frac{q_o}{c}} = \frac{N_{cH}}{N_c} = F_c$$

La figure 4-2 donne les valeurs expérimentales de ce rapport en fonction de $\frac{H}{B}$, pour une semelle rigide.

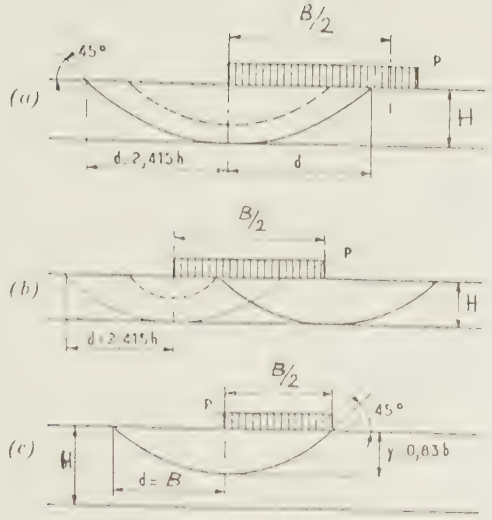
HABIB et ŠUKLJE signalent [33] que ces résultats concordent bien avec ceux fournis par la théorie développée par MEYERHOF et CHAPLIN [68] (cf § 4.5).

En ce qui concerne les charges souples, dont les différentes répartitions simulent diverses formes de remblais, les auteurs considèrent que les lignes de glissement obtenues expérimentalement coïncident avec des lignes circulaires tangentes au substratum rigide et faisant un angle de 45° avec la surface horizontale du matériau. Ces lignes circulaires peuvent passer à travers la charge (voir figure 4-3).

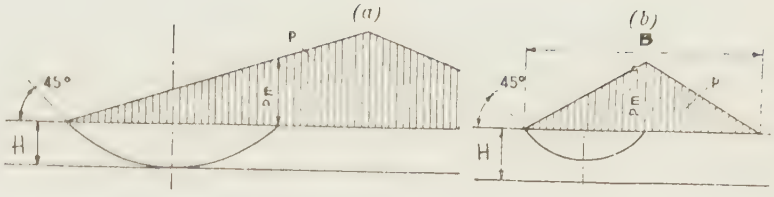
Des calculs simples (il suffit d'écrire l'équilibre des moments des forces appliquées sur le cercle) permettent alors, et pour chaque distribution de charge, de calculer q. Par exemple, pour une répartition uniforme $q = 2\pi c$. Pour une répartition triangulaire $q = 3\pi c$ (voir figure 4-3).

4.3.1.5 Remarques personnelles

Notons tout d'abord que cette étude expérimentale ne permet pas de dégager un schéma de rupture des fondations reposant sur une couche de sol d'épaisseur limitée. Les auteurs se bornant à constater la bonne concordance des essais avec l'hypothèse, précédemment formulée, de lignes de rupture circulaires. Nous présenterons alors trois remarques concernant cette hypothèse et cette concordance, en nous bornant au cas simple où la charge souple est



Répartition uniforme de la charge.



Répartition triangulaire de la charge.

Fig. 4-3 : Calcul de pression portante limite par HABIB et ŠUKLJE.

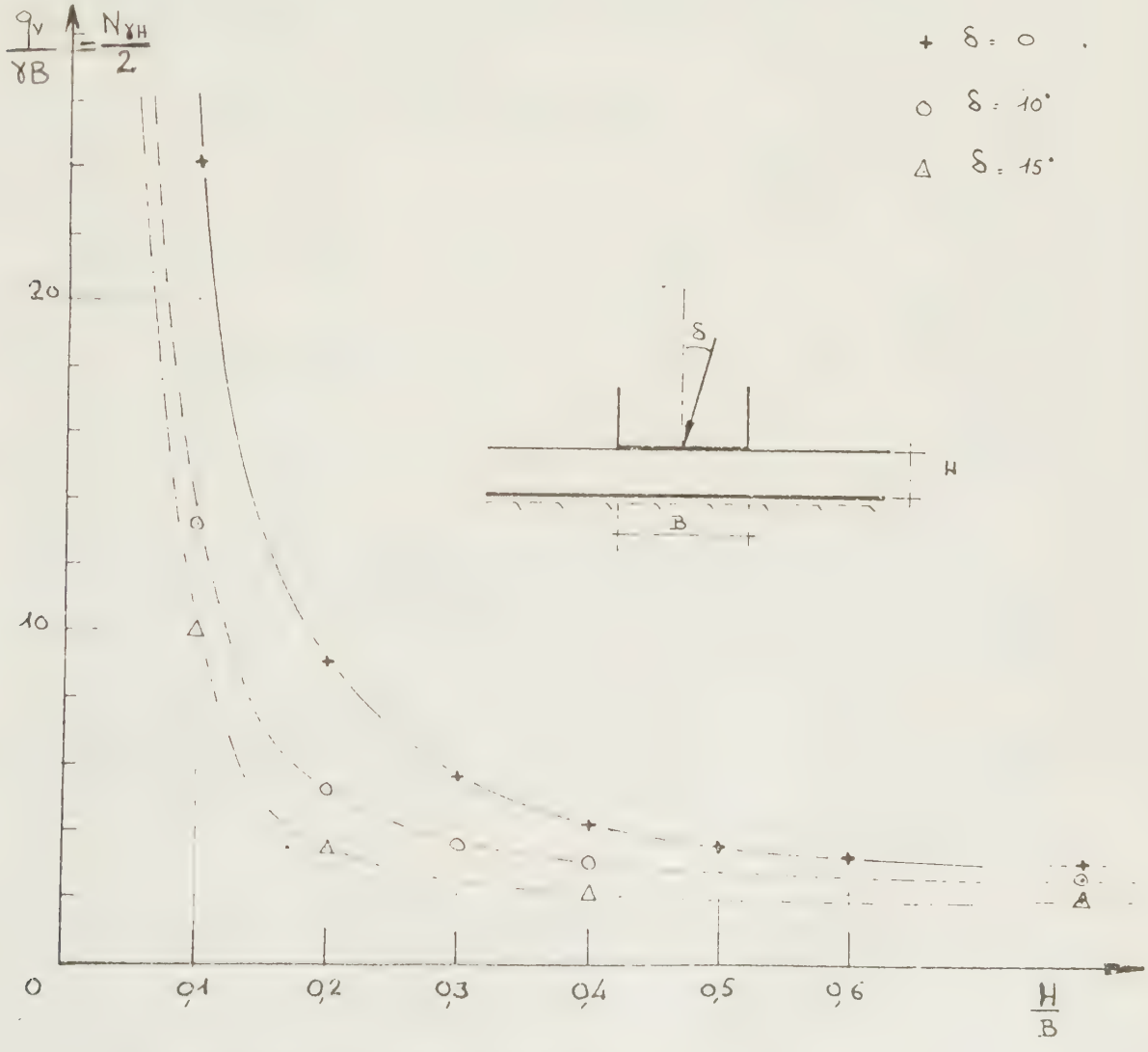


Fig. 4-4 : Résultats des essais de HAERINGER sur modèle bidimensionnel à rouleaux . $\phi = 26°$, c = o, γ = 2.20 à 2.50 t/m3, interface rugueux.

uniformément repartie.

1. La valeur $2\pi c$ trouvée par les auteurs dans ce cas est supérieure à $(2+\pi).c$, valeur obtenue en considérant le schéma de rupture en plasticité parfaite dans un milieu semi-infini purement cohérent. $2\pi c$ est également supérieur à 5.5 c valeur obtenue par FELLENIUS [25] avec la ligne de glissement circulaire donnant la plus faible valeur de q.

Cette valeur n'est donc pas dans le sens de la sécurité.(On trouvera dans TAYLOR [104, p 572],une étude détaillée des différentes méthodes de calcul citées ci-dessus).

2. Cette même valeur ($2\pi c$) ne dépend pas du rapport $\frac{H}{B}$, ce qui semble surprenant. Mais il ne faut pas oublier que la ligne de glissement peut passer à travers la charge (ce qui est une hypothèse légitime s'agissant de remblais). Il faudrait donc compléter le calcul proposé par HABIB et ŠUKLJE en prenant en compte les forces qui agissent sur la partie du cercle de glissement qui traverse le remblai.

3. Il est alors d'autant plus facile aux auteurs de faire "concorder" leurs résultats expérimentaux avec la valeur $q = 2\pi c$ indépendante de $\frac{H}{B}$, qu'ils ont peu (ou pas) fait varier ce rapport (pour chaque distribution de charge) et que le critère de rupture (de par la forme même des courbes pression-enfoncement) est suffisamment imprécis pour pouvoir être compatible avec cette valeur constante.

Nous formulons maintenant une remarque concernant les semelles rigides : les diagrammes pression-enfoncement réalisés avec ces plaques sont très proches de ceux obtenus avec une charge souple uniformément répartie.

Les auteurs en concluent que la répartition des pressions sous la plaque rigide est proche de l'uniformité. Cette conclusion semble à la fois rapide et peu conforme à la répartition des contraintes obtenue par la théorie de la plasticité (voir § 4.5).

Enfin, il nous semble qu'un point important a été négligé dans les manipulations : celui de l'adhérence à l'interface matériau-substratum.

Deux cas limites peuvent caractériser simplement cette adhérence :

$\sigma_t = 0$: interface lisse

$|\sigma_t| = c$: interface parfaitement rugueux.

Entre ces deux cas limites, toutes les rugosités peuvent être réalisées :

$$o < \sigma_t < c$$

Les auteurs, qu'ils considèrent le fond de la cuve comme "lisse" (essais de charges souples) ou comme "rugueux" (essais de charges rigides) n'ont pas mesuré la fraction m de la cohésion qui est mobilisée par la contrainte tangentielle : $\sigma_t = m\ c$ avec

$$o \leqslant m \leqslant 1$$

L'importance de ce "coefficient de rugosité" de l'interface apparaitra avec la théorie développée par SALENÇON (voir § 4.5), en plasticité parfaite.

4.3.2 Essais de BROWN sur argile

Ces travaux expérimentaux réalisés sous la direction de MEYERHOF [8] sont analysés au § 5.3.2. En effet, il s'agit d'étudier la force portante d'un sol bicouche purement cohérent. Le cas où la cohésion de la couche inférieure est infinie (assise rigide) n'intervient alors que comme un cas particulier. Nous avons porté les résultats de ces essais sur la figure 4.22. Il est à noter que BROWN et MEYERHOF proposent pour valeur moyenne de ces résultats :

$$N_{cH} = 1 + \pi + 1.1 \frac{B}{H}$$

alors que nous verrons que les travaux théoriques menés par MEYERHOF et CHAPLIN mènent à la formule :

$$N_{cH} = 1 + \pi + 0.5 \frac{B}{H}$$

Remarque : D'autres travaux expérimentaux sur le même sujet et réalisés également au Canada doivent faire l'objet d'une publication par MILOVIC et TOURNIER [70].

4.3.3. Essais sur milieu pulvérulent bidimensionnel

4.3.3.1 Généralités

Ces essais furent réalisés par HAERINGER [34] au Laboratoire de Mécanique des Sols de l'Université de Grenoble, dans le cadre d'une thèse de 3e cycle.

4.3.3.2 Matériau

Le modèle analogique bidimensionnel est constitué de petits rouleaux cylindriques en dural, de caractéristiques mécaniques :

$\phi \simeq 26°$, $c = 0$, γ de 2.20 à 2.50 t/m3.

4.3.3.3. Appareillage . Mesures

La charge, rigide est appliquée par un système permettant de faire varier son inclinaison et son excentrement. Des cellules permettent de mesurer les contraintes sous la semelle. Celle-ci, ainsi que le substratum rigide, sont rendus parfaitement rugueux par un réseau de pointes métalliques. L'angle de frottement entre la base de la fondation ou le substratum,d'une part, et les rouleaux,d'autre part, est donc égal à ϕ. La maquette de fondation à base rugueuse a une largeur de 45 cm.

4.3.3.4. Résultats

Ils sont de deux sortes : tout d'abord, une série de photographies montrant les déplacements des rouleaux à la rupture (appareil photographique fixe) et permettant d'étudier la cinématique du problème [34, clichés 25 à 31], pour une charge centrée verticale ou présentant une inclinaison δ de 10°et 15° sur cette verticale. Enfin l'auteur fournit tout une série de mesures du coefficient $N_{\gamma H} = \frac{q_v}{0.5 \gamma B}$ en fonction du rapport $\frac{H}{B}$ et de δ, dont nous reproduisons tous les résultats sur la figure 4-4.

4.3.3.5. Remarques personnelles

Nous sommes obligés de regretter que cette étude expérimentale (qui comporte par ailleurs, l'étude de bien d'autres cas de fondations) ne contienne pas les quatre séries de manipulations suivantes :

1. Des photographies à la rupture avec objectif solidaire de la fondation. Ces photographies auraient permis de connaître la forme et la dimension du coin triangulaire de matériau solidaire de la base de la fondation.

2. Des mesures de la répartition des contraintes sous la base.

3. Des mesures de N_γ à $\frac{H}{B}$ constant, en faisant varier B et H.

Ces essais auraient permis de déceler un éventuel "effet d'échelle", rendu probable, à notre avis, par le fait que, pour la plus petite valeur de $\frac{H}{B}$ utilisée, l'épaisseur H de la couche ne mesure que 4,5 cm et le rapport $\frac{\text{diamètre des rouleaux}}{H} = \frac{0.5}{4.5} = 0.11$, ne peut plus alors être considéré comme négligeable.

4. Des essais avec une base de fondation et avec un substratum lisses.

4.3.4. Essais sur milieu pulvérulent tridimensionnel

4.3.4.1. Généralités

Les résultats de ces essais, très récents, ont donné lieu à une publication de KANANYAN [42]. Ils semblent, à plusieurs égards, plus complets que ceux de HAERINGER.

4.3.4.2. Matériau

C'est un sable alluvial sec de caractéristiques mécaniques :

$$\phi = 38°, \quad c = 0, \quad \gamma = 1.72 \text{ t/m3}.$$

4.3.4.3. Appareillage . Mesures

La cuve, munie de vitres, a pour dimensions : 2 x 0,82 x 1,2 m Les semelles, rigides, utilisées sont rugueuses et ont des largeurs B de 16,

20, 24 et 30 cm.

Le fond de la cuve est constitué d'une plaque d'acier rugueux.

L'inclinaison δ de la charge peut varier de 0° à 20°.

Les composantes horizontale et verticale du déplacement sont mesurées en cours de chargement.

Des photographies prises avec objectif fixé au bâti puis fixé à la semelle permettent d'étudier la cinématique de la rupture.

4.3.4.4. Résultats

1. L'auteur présente des tableaux de mesures de la force portante limite pour différentes valeurs de B, H, δ. Nous avons rassemblé les valeurs correspondant à $\delta = 0°$ et H = 20 cm dans la figure 4-5 sous une forme pratique : $N_{\gamma H}$ en fonction de $\frac{H}{B}$.

2. KANANYAN s'est particulièrement attaché à mesurer la forme et la dimension du coin triangulaire rigide solidaire de la fondation, et ceci suivant les différentes valeurs de H, B et δ.

4.3.4.5. Remarques personnelles

Elles seront peu nombreuses, car cette étude expérimentale nous semble particulièrement complète et intéressante. En particulier, l'auteur signale qu'il s'est efforcé de donner à B et H des valeurs suffisamment grandes pour que le milieu puisse toujours être considéré comme continu et homogène. Néanmoins, KANANYAN est muet en ce qui concerne le frottement parasite sable-cuve. On sait pourtant les difficultés rencontrées par TCHENG (cf § 3.3.1) à cet égard. De même, il est insuffisant de noter que la base de la fondation et le substratum rigide sont "rugueux", il aurait fallu mesurer les angles de frottement semelle-sable et substratum-sable.

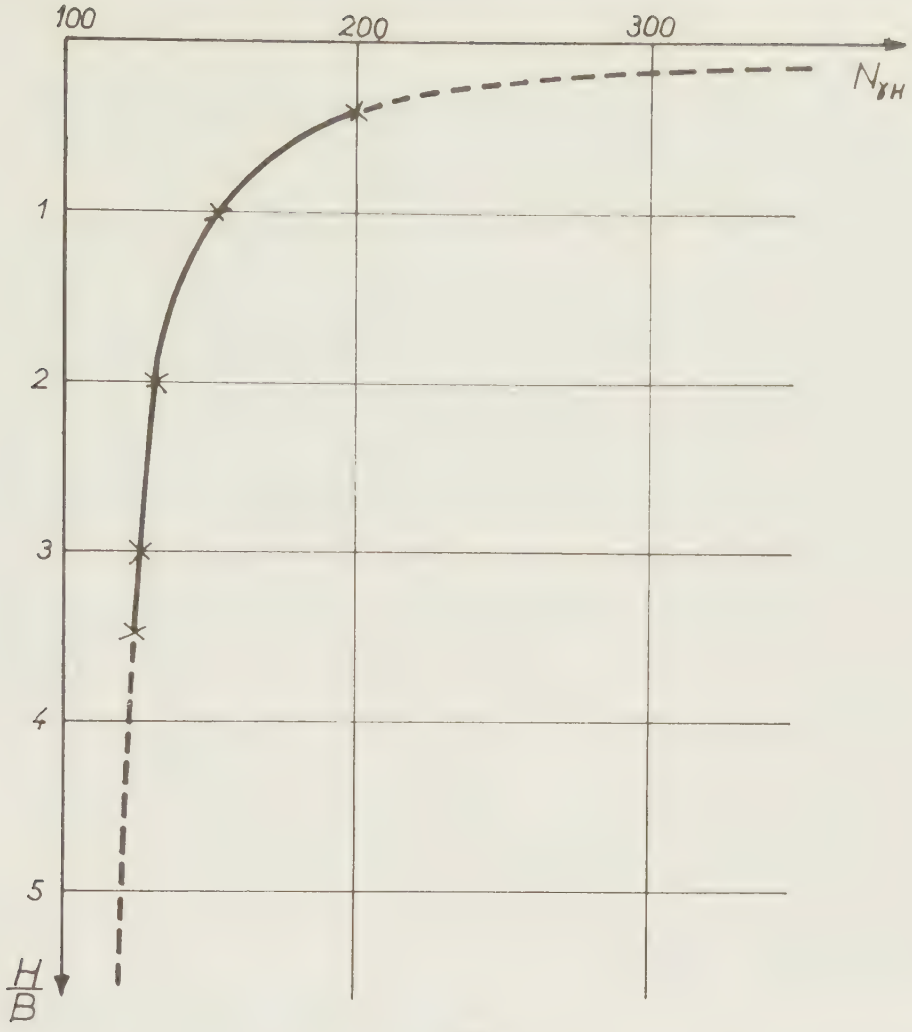
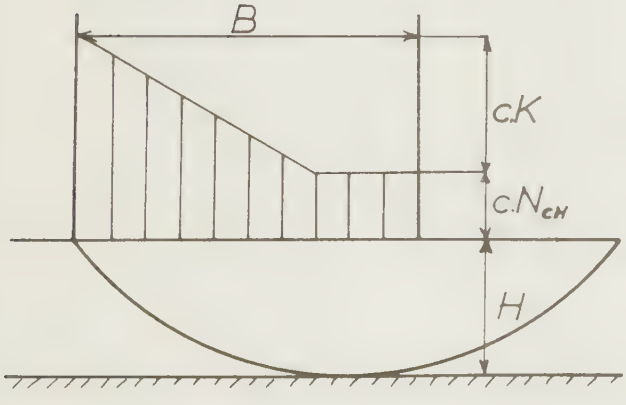
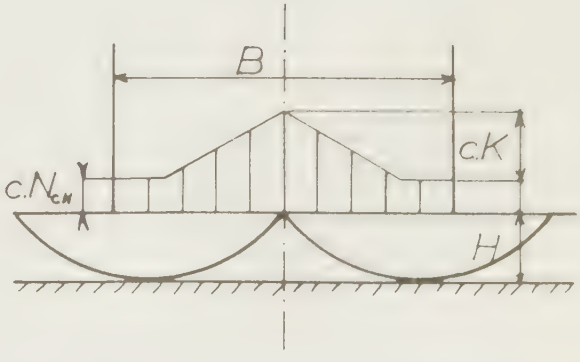


Fig. 4-5

Résultats des essais de KANANYAN, sur sable $\phi = 38°$, $c = 0$, $\gamma = 1.72$ t/m3. Interface rugueux. $\delta = 0°$. H = 20 cm.(en tirets : valeurs extrapolées par l'auteur).



Rupture suivant un cercle passant par le bord de la fondation.



Rupture suivant 2 cercles passant par le milieu de la fondation.

Fig. 4-6

2 Schémas de rupture utilisés par M.A. SENS, pour un sol purement cohérent ($\phi = 0°$).

4.4. CALCUL DE LA FORCE PORTANTE LIMITE EN FAISANT L'HYPOTHESE D'UNE LIGNE DE GLISSEMENT CIRCULAIRE

4.4.1. Généralités

C'est JAKOBSON [38] qui le premier en 1948 utilisa la méthode de FELLENIUS [25] pour calculer la force portante d'une couche de sol purement cohérente d'épaisseur limitée. Il se borna à étudier le cas d'une charge "en gradins" simulant un remblai routier. On a vu que les chercheurs du C.E.B.T.P. (§4.3) ont repris cette méthode en l'étendant à des cas divers de répartition de la charge.

BUTTON [10], ensuite, proposa en 1953, un calcul de la force portante d'un sol purement cohérent composé de 2 couches. Ses résultats peuvent s'appliquer au cas de la couche purement cohérente d'épaisseur limitée, lorsqu'on fait tendre la cohésion de la couche inférieure vers l'infini. On obtient alors la courbe notée "c_2^{∞}" de l'abaque n° 1 de l'annexe II. Marie-Armelle SENS propose maintenant, dans sa thèse de Docteur-Ingénieur [87, p 118], un calcul légèrement différent et très intéressant.

4.4.2. Les Travaux de M.A. SENS

Nous verrons au § 4.7 que les valeurs du coefficient N_{cH} de BUTTON (qui sont celles que nous avons retrouvées au chapitre II), sont supérieures à celles obtenues en plasticité parfaite pour $\frac{H}{B} < 0.7$. Cela vient du fait que nous supposons une charge appliquée concentrée au milieu de la base de fondation. C'est notamment le cas lorsque les contraintes sous la semelle sont uniformes, à la rupture. Or, les travaux de MEYERHOF et CHAPLIN [68] et de SALENÇON [86] montrent que les contraintes augmentent vers le milieu de la charge. M.A. SENS propose alors deux schémas de rupture selon un cercle passant par le bord de la fondation, ou bien 2 cercles passant par le milieu de celle-ci, ce qui est cinématiquement contestable (fig. 4-6). Le calcul se déroule alors comme celui mené au § 2.3, avec un paramètre supplémentaire qui est un coefficient K tel que la contrainte maximale sous la semelle soit égale à : $c \cdot (N_{cH} + K)$ (voir fig. 4.6).

La comparaison entre ces résultats, ceux de BUTTON et ceux de SALENÇON sera menée au § 4.7 et sur la figure 4-23.

4.5 TRAVAUX UTILISANT LA THEORIE DU POINÇONNEMENT D'UNE PLAQUE

C'est au comportement des métaux, répondant au critère de TRESCA (acier par exemple) que les théoriciens de la plasticité commencèrent à s'intéresser. Il était donc extrêmement tentant, pour les Mécaniciens du sol, d'utiliser, ou de tranformer, des théories existant depuis souvent plusieurs dizaines d'années pour résoudre leurs propres problèmes. On verra dans ce paragraphe qu'ils le firent avec plus ou moins de bonheur.

C'est PRANDTL [75] qui proposa en premier une théorie du poinçonnement d'une plaque d'un matériau répondant au critère de TRESCA. Mais c'est aux travaux de HILL que se réfèrent tous les mécaniciens du sol qui tentent d'utiliser la théorie de la plasticité pour résoudre le problème de la force portante limite d'une couche de sol d'épaisseur limitée.

4.5.1. Travaux de HILL

4.5.1.1. Généralités

On peut distinguer, dans l'ouvrage de HILL [36] deux théories: celle de la compression d'une plaque entre deux blocs $(\frac{H}{B} < \frac{1}{2})$ qui sera utilisée par MEYERHOF et celle du poinçonnement d'une plaque entre deux poinçons $(\frac{H}{B} > \frac{1}{2})$ qui sera utilisée par LIVNEH et VYALOV.

4.5.1.2. Hypothèses

Le schéma de la figure 4-7 est dû à HILL, mais avait déjà été étudié, dans le cas où la charge est de largeur infinie ($B \infty$) par NADAÏ [71], PRANDTL [75] et par HARTMANN [35]. Le matériau répond au critère de TRESCA ($\phi = 0$). Les poinçons, rigides, ont un coefficient d'adhérence m.

Le schéma de la figure 4-8 est également dû à HILL. Lorsqu'on étudie le cas d'une plaque comprimée entre deux poinçons, on prolonge le schéma par symétrie par rapport au plan TT'. Le matériau répond également au critère de TRESCA. Le poinçon et l'interface sont supposés lisses (contraintes tangentielles nulles), soit $m = m' = o$.

4.5.1.3. Déroulement des calculs

Dans les 2 cas, on résoud le système donné par les équations de l'équilibre :

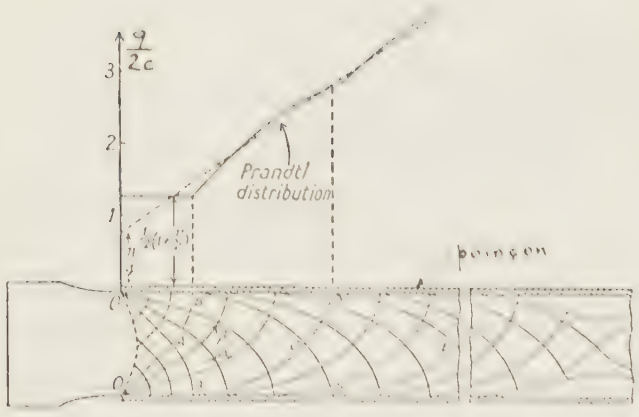


Fig. 4-7 : Compression d'une plaque répondant au critère de TRESCA, entre 2 poinçons rigides, d'après HILL, pour $\frac{H}{B} < \frac{1}{2}$.

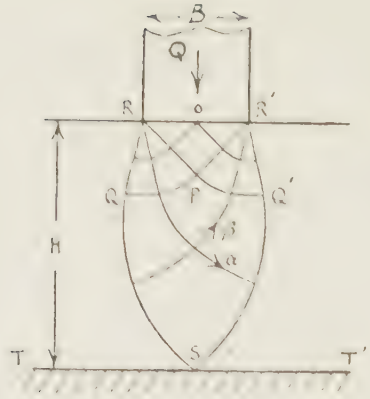


Fig. 4-8 :Poinçonnement d'une plaque répondant au critère de TRESCA, d'après HILL pour $\frac{H}{B} > \frac{1}{2}$

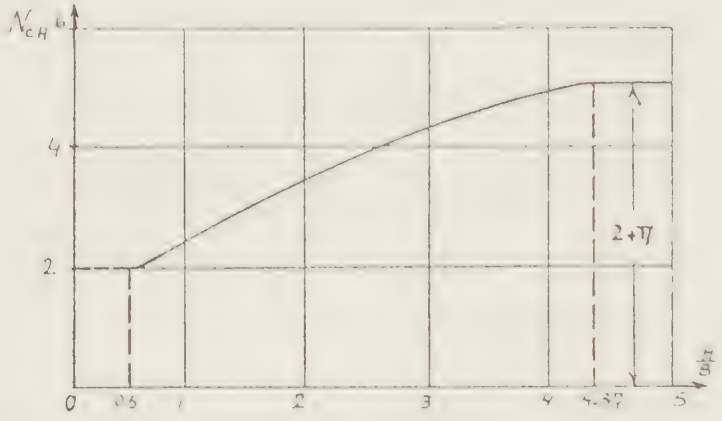


Fig. 4-9 : Résultats de la théorie développée par HILL à partir du schéma de poinçonnement de la figure 4-8.

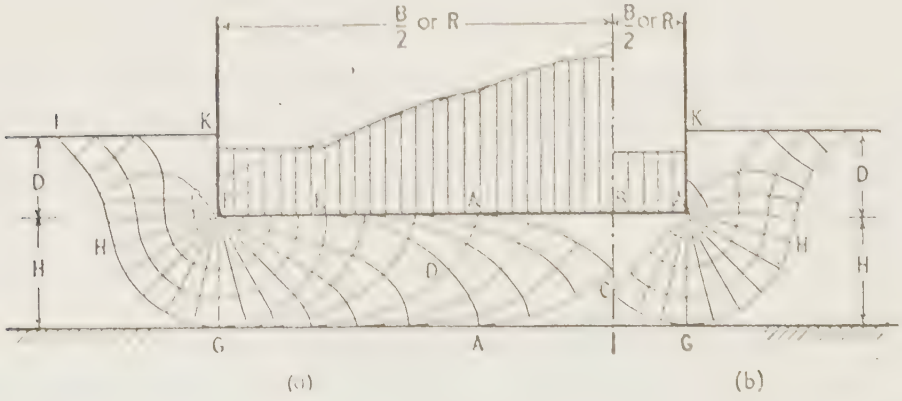


Fig. 4-10 : Modification du schéma de la fig. 4-7 par MEYERHOF et CHAPLIN

a) $\frac{H}{B} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{H}{B} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

_____ répartition réelle des contraintes
------ répartition approchée des contraintes.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

et le critère de TRESCA : $F(\sigma_{ij}) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4c^2$.

La solution cinématique est fournie moyennant l'hypothèse du potentiel plastique-matériau standard :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Dans le cas de la figure 4-7, la résolution, classique, est entièrement explicite si l'on remplace la répartition réelle des contraintes sous le poinçon (courbe pleine) par la répartition approchée (droite pointillée). Les bicaractéristiques statiques et cinématiques, qui sont confondues (matériau standard), sont 2 familles orthogonales de cycloïdes.

La droite pointillée est obtenue quand le réseau de cycloïdes s'étend sous toute la largeur du poinçon.

Dans le cas de la figure 4-8 : Le réseau de bicaractéristiques, composé de segments de droites et d'arcs de cercles dans la zone R R' Q' P Q, est complété numériquement. HILL intègre les contraintes obtenues sur l'axe OPS et écrit que le résultat est égal à la somme des forces qui agissent horizontalement sur T T'. Dans le cas où le substratum est lisse, cette somme est nulle. L'équation ainsi obtenue permet de calculer la charge limite exercée par le poinçon.

4.5.1.4. Résultats

Dans le cas de la figure 4-7, où la solution, approchée, est explicite, la pression portante limite $q = \frac{Q}{B}$ est donnée par :

$$\frac{q}{c} = N_{cH} = 2\left(\frac{m\,B}{2\,H} + \frac{\text{Arcsin } m}{m} + \sqrt{1-m^2}\right)$$

On remarquera que l'on retrouve la solution habituelle du milieu semi-infini homogène en faisant m = 1 (poinçon rugueux) et $\frac{H}{B} = \frac{1}{2}$. Cette solution a aussi été proposée par SOKOLOVSKY [96].

Dans le cas de la figure 4-8, où la solution n'est pas entièrement explicite, le coefficient de force portante N_{cH} est donné par la courbe de la figure 4-9.

La cinématique associée à ce schéma montre que les blocs rigides R' Q' S T' et R Q S T se déplacent horizontalement avec une vitesse $\frac{u\,B}{2\,H}$ où u est la vitesse d'enfoncement du poinçon.

4.5.2. Travaux de MEYERHOF et CHAPLIN [68]

4.5.2.1. Généralités

Les auteurs se sont inspirés du schéma de la figure 4-7 pour proposer une solution au problème de la force portante limite d'une couche de sol purement cohérent, d'épaisseur finie, supportant une fondation semi-enterrée (fig. 4-10).

4.5.2.2. Hypothèses

Ce sont celles faites par HILL. Seul, le schéma de rupture est modifié pour tenir compte d'une remontée du sol. Mais ceci n'a aucune conséquence, car l'approximation nécessitée par le calcul explicite suppose que la zone cycloïdale s'étend d'un bout à l'autre de la fondation (droite pointillée).

4.5.2.3. Résultats

La formule proposée par HILL et SOKOLOVSKY se généralise en

$$q = c \,.\, N_{cH} + \gamma \,.\, D \,.\, N_{q\,H}$$

avec $$N_{cH} = \left(\frac{m\,B}{2\,H} + \frac{\text{Arcsin } m}{m} + \sqrt{1-m^2} \right)$$

et $N_{qH} = 1$

expressions dont on va voir qu'elles sont incorrectes.

4.5.2.4. Remarques personnelles

1. La formule donnant N_{cH} est erronée : pour m = 1, elle s'écrit $N_{cH} = \frac{B}{2H} + \frac{\pi}{2}$, alors que dans une publication ultérieure, MEYERHOF [9] rectifie cette valeur en :

$$N_{cH} = 1 + \pi + \frac{B}{2H}$$

Or, SALENÇON [86] donne pour les équations de l'asymptote à la courbe N_{cH} fonction de $\frac{H}{B}$, pour $\phi = 0°$, l'expression :

$$N_{cH} = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{m\sqrt{1-m^2} + \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin } m}{m+1} + (m+1)\frac{B}{4H}$$

Pour m = 1, on retrouve bien $N_{cH} = 1 + \pi + \frac{B}{2H}$

2. Le schéma de la figure 4-10-a se raccorde avec celui de la figure 4-10-b pour $\frac{H}{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, or on retrouve la valeur $N_{cH} = (2 + \pi)$ pour $\frac{H}{B} = \frac{1}{2}$. Cette discordance, mineure, provient de la manière dont MEYERHOF a transformé le schéma de HILL de la figure 4-7, sous les bords de la fondation. D'ailleurs, ce schéma est cinématiquement impossible car on ne peut passer continûment de la dernière bicaractéristique circulaire à la première bicaractéristique cycloïdale.

3. Les auteurs ont pris $N_{qH} = 1$ comme si le sol était semi-infini. En réalité, on ne comprend pas pourquoi, alors que N_{cH} est une fonction de m et de $\frac{H}{B}$, N_{qH} serait indépendant de ces deux paramètres. On verra qu'il n'en est rien au § 4.6.

4. Les quelques essais qui ont été effectués par les auteurs pour vérifier les résultats des travaux théoriques sont trop peu nombreux pour pouvoir être concluants.

4.5.3. Travaux de LIVNEH et VYALOV

4.5.3.1. Généralités

LIVNEH [57] et VYALOV [114] ont, indépendamment l'un de l'autre, utilisé le même schéma de la figure 4-8, dû à HILL, pour calculer la force portante limite d'une couche d'épaisseur limitée de sol cohérent avec angle de frottement interne non nul.

4.5.3.2. Hypothèses

Le réseau des bicaractéristiques statiques de la figure 4-8 a été modifié de telle façon que les deux familles ne se coupent plus sous un angle de $\frac{\pi}{2}$, mais de $\frac{\pi}{2} - \phi$. Le critère est celui de COULOMB. La base de la fondation et le substratum sont supposés lisses. Le sol est non pesant.

4.5.3.3. Déroulement des calculs

La méthode de calcul de HILL est conservée par les deux auteurs, à la seule différence que les contraintes sur l'axe sont obtenues pour LIVNEH par les équations de KOTTER et pour VYALOV grâce aux variables et aux équations de SOKOLOVSKY.

4.5.3.4. Les résultats obtenus sont analogues :

le rapport $\frac{N_{cH}}{N_c}$ augmente avec $\frac{H}{B}$. La plus petite valeur calculable est obtenue pour $\frac{H}{B} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$. VYALOV considère que pour $\frac{H}{B}$ inférieur à cette valeur, $\frac{N_{cH}}{N_c}$ augmente également et tend vers l'infini quant $\frac{H}{B}$ tend vers zéro. Il obtient donc une courbe de $\frac{N_{cH}}{N_c}$ en fonction de $\frac{H}{B}$ présentant un minimum.

4.5.3.5. Remarques personnelles

1. La solution de HILL pour un milieu purement cohérent répondant au critère de TRESCA (figure 4-8) était une solution statique et cinématique. Le schéma modifié pour un milieu pulvérulent n'a plus de signification cinématique.

2. La solution proposée par les auteurs pour le matériau de COULOMB est calculée en milieu non-pesant.

3. Enfin, LIVNEH n'a pas remarqué que l'étude de HILL supposait la possibilité de déplacements latéraux du matériau, compatibles avec la cinématique du problème. Ceux-ci sont possibles pour une plaque métallique, mais ne le sont plus pour un sol, sauf si la couche d'épaisseur H finie est limitée sur les côtés par deux tranchées de hauteur H, comme le remarque ABSI [2].

Si VYALOV a vu, lui, cette difficulté, son hypothèse d'un sol suffisamment compressible pour ne pas gêner les déformations de la zone plastique ne semble guère convaincante.

Nous verrons dans le § 4.6 comment SALENÇON a traité de manières différentes les deux problèmes : celui de la plaque métallique et celui de la couche de sol.

4.5.4. Travaux de YAMAGUCHI et TERASHI [116]

4.5.4.1. Généralités

Les auteurs considèrent un sol tricouche : un milieu pulvérulent surmonte un milieu cohérent (c, ϕ), reposant lui-même sur une assise pulvérulente mais supposée rigide (figure 4-11 a).

4.5.4.2. Hypothèses

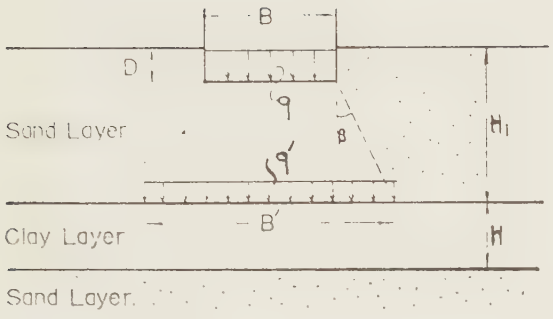
On n'envisage ici que la rupture dans la couche intermédiaire. On fait l'hypothèse que la contrainte uniforme q se transmet à l'interface en une contrainte uniforme q' suivant un prisme dont les côtés latéraux font un angle $\beta = 30°$ avec la verticale. La couche cohérente est supposée non pesante.

4.5.4.3. Déroulement des calculs

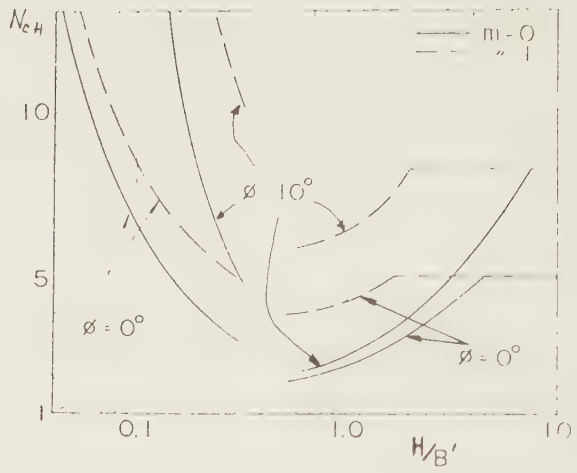
Pour trouver la relation entre $\frac{q'}{c}$ et $\frac{H}{B'}$, en fonction de ϕ, on emploie 3 schémas de rupture :

. pour $\frac{H}{B'} < 0.5$ les auteurs modifient le schéma proposé par MEYERHOF et CHAPLIN (§ 4.5.2.) en prenant deux familles de cycloïdes isogonales.

. pour $\frac{H}{B'} > 0.5$ les auteurs emploient le schéma et les résul-

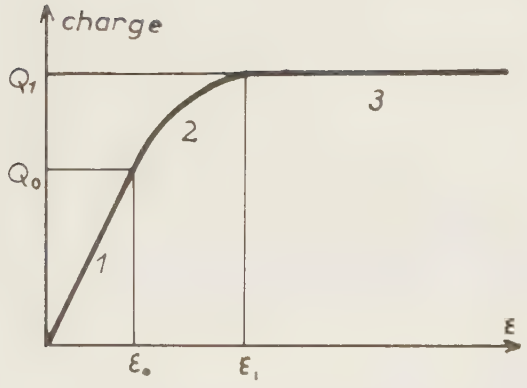


a) Schéma du sol de fondation (β = 30°)

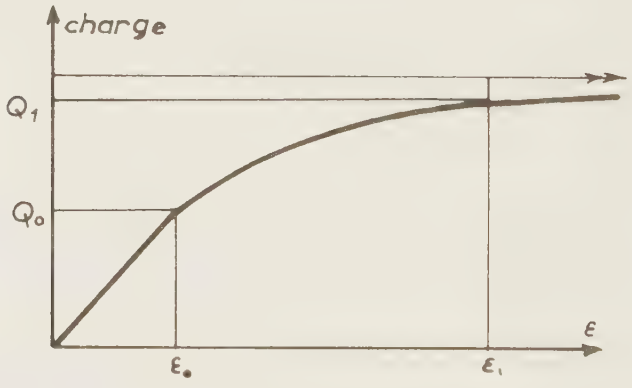


b) résultats : $N_{cH} = \frac{q'}{c}$

Fig. 4-11 : Travaux théoriques de YAMAGUCHI et TERASHI.



a) Changements de géométrie négligeables



b) comportement asymptotique.

Fig. 4-12 : Théorie des charges limites.

tats de LIVNEH et VYALOV (§ 4.5.3.) qu'ils limitent à la valeur de $\frac{q'}{c}$ = 5.14 obtenue en milieu homogène à l'aide du schéma de rupture classique dû à PRANDTL.

4.5.4.4. Les résultats (figure 4-11-b) montrent une courbe $\frac{q'}{c}$ fonction de $\frac{H}{B'}$ présentant un minimum, comme les courbes obtenues par VYALOV.

4.5.4.5. Remarques personnelles

On peut reprendre intégralement toutes les remarques formulées aux § 4.5.2.4. et 4.5.3.5. à propos des travaux de MEYERHOF et CHAPLIN et de ceux de LIVNEH et VYALOV. On a vue que certaines d'entre elles étaient fondamentales et qu'elles remettent en cause l'ensemble des résultats obtenus par YAMAGUCHI et TERASHI. En particulier, l'existence d'un minimum pour m = 1, sur les courbes de la figure 4-11-b est inexacte, comme l'a démontré SALENÇON (§ 4.6).

Les trois schémas de rupture utilisés suivant les valeurs de $\frac{H}{B'}$ sont fondés sur des conditions aux limites en déplacements totalement différentes, il n'est donc pas étonnant que les courbes de la figure 4-11-b se raccordent mal.

4.6. TRAVAUX DE SALENÇON

Dans tout ce paragraphe, nous utiliserons les théories et les résultats exposés par SALENÇON dans sa thèse de Doctorat ès Sciences. Il nous a semblé utile de reprendre tout d'abord les principaux résultats de la théorie des charges limites, ce qui devrait permettre au lecteur de mieux saisir les difficultés de résolution des deux problèmes qui suivent : celui du poinçonnement d'une plaque (ce sera l'occasion de revenir sur les travaux de HILL, MEYERHOF, VYALOV et LIVNEH), et celui de la force portante d'une couche de sol d'épaisseur limitée, problème qui nous intéresse plus particulièrement.

4.6.1. Théorie des charges limites :

Cette théorie est due aux travaux de MANDEL [62] et [63], RADENKOVIC [76], HILL [36] et [37], DRÜCKER [20] et [21], DRÜCKER et PRAGER [22] et SALENÇON [86].

4.6.1.1. Structure et loi des matériaux

Le matériau doit être composé d'un ou plusieurs solides séparés par des interfaces. Le chargement se fait par variation continue d'un paramètre (que nous appelerons Q en pensant au problème du poinçon ou de la fondation), les autres conditions aux limites restant constantes. On étudie l'écoulement initial. En phase plastique "palier" le principe du travail maximal est vérifié dans tous les solides, ce qui a pour conséquence immédiate :

- si le matériau est composé d'un seul solide :

celui-ci doit obéir au critère de TRESCA ou à celui de COULOMB complété par l'hypothèse du potentiel plastique-matériau standard (corps non incompressible).

- si le massif est composé de plusieurs matériaux standards :

. soit ceux-ci répondent tous au critère de TRESCA et alors il y a deux possibilités pour les interfaces : collés ($\vec{v} = 0$, $|\vec{\sigma_t}| \leq mc$) ou bien rugueux ($\vec{v} \neq 0$, $|\vec{\sigma_t}| = mc$). $0 \leq m \leq 1$

. soit un solide au moins est coulombien et deux possibilités s'offrent encore pour les interfaces : parfaitement lisses ($|\vec{\sigma_t}| = 0$) ou bien collés.

Ces théorèmes sont dûs aux travaux de RADENKOVIC [76], DRÜCKER et PRAGER [22], DRÜCKER [20].

4.6.1.2. Structure rigide-parfaitement plastique associée.

A la loi élasto-plastique d'un matériau, on associe une loi rigide-parfaitement plastique dont le critère est celui du critère "palier" du matériau élasto-plastique. Le principe du travail maximal est alors satisfait pour ce corps. Donnons de celui-ci l'énoncé suivant, dû à HILL [36] et [37] :

"Le travail effectué par la distribution réelle des forces à la surface avec les déplacements imposés est supérieur à celui calculé en employant tout autre distribution de forces à la surface correspondant à un autre champ de contraintes en équilibre plastique",

soit : $\int_S F_i \cdot du_i \cdot dS > \int_S F_i^* \cdot du_i \cdot dS$

Lorsque le paramètre de chargement augmente jusqu'à atteindre la valeur limite Q, la structure est tout d'abord rigide (et le champ licite des contraintes n'est pas unique); puis apparaît l'écoulement plastique libre : la valeur Q est alors unique et ne dépend pas du chemin suivi (voir MANDEL [62]).

4.6.1.3. Signification de Q pour le matériau élasto-plastique associé

Supposons, pour simplifier, que la relation entre le paramètre de chargement et les déformations soit scalaire et non tensorielle (fig. 4-12). Dans le cas de la figure 4-12-a, les changements de géométrie sont négligeables et ε_1 est faible.

Dans la zone 1, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$ élastique

Dans la zone 2, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$ élastique + $\dot{\varepsilon}$ plastique
(il existe des zones de plasticité contenues)

Dans la zone 3, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$ plastique, et la structure continue de se déformer sous charge constante. On a alors $Q = Q_1$.

Dans le cas de la figure 4-12-b (comportement asymptotique), on peut se ramener au cas précédent si ε_1, (valeur pour laquelle l'écart entre la courbe et l'asymptote peut être négligé) est inférieur à $3\varepsilon_e$. On prend alors $Q_1 \simeq Q$. Il existe des cas où les changements de géométrie ne sont plus négligeables : pour l'expansion quasi-statique d'une cavité dans un milieu semi-infini, on trouve une valeur finie pour Q_1 et une valeur infinie pour Q. (Voir MANDEL [62]).

4.6.1.4. Conditions aux limites

Sur les surfaces extérieures, la manière correcte dont elles doivent être données a été étudié pour l'écoulement plastique libre par MANDEL [62].

En ce qui concerne le massif infini ou semi-infini, les déplacements à l'infini doivent être pris nuls.

Nous avons déjà cité les conditions sur les interfaces au § 4.6.1.1.

4.6.1.5. Propriétés de la charge limite

Nous énoncerons 2 théorèmes dont nous verrons les conséquences dans les paragraphes suivants :

a) le chargement est inférieur à Q : il existe au moins un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible en équilibre avec le chargement.

Il n'existe pas de champ de vitesses de déformation cinématiquement et plastiquement admissible. La puissance des forces extérieures est inférieure ou égale à la puissance dissipée.

b) le chargement est supérieur à Q : il n'existe pas de champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible en équilibre avec Q.

Il existe au moins un champ de vitesses de déformation cinématiquement et plastiquement admissible.

La puissance des forces extérieures est supérieure ou égale à la puissance dissipée.

Précisons les définitions suivantes :

Statiquement et plastiquement admissible (S P A)

veut dire que sont respectés :

- les équations de l'équilibre
- le critère d'écoulement du matériau
- les conditions aux limites en contraintes.

Cinématiquement et plastiquement admissible (C P A)

signifie la possibilité d'associer au champ des vitesses de déformation, en tout point où ces vitesses sont non nulles, au moins un tenseur-contrainte vérifiant la loi de comportement et le critère. Les conditions aux limites en vitesses sont respectées.

4.6.1.6. Détermination de Q

a) Minorant de Q : méthode statique

On détermine un champ de contraintes SPA, d'après le 1er théorème du § 4.6.1.5. On peut donc en déduire un minorant de Q.

Remarque : Le champ doit être connu en tout point du massif, y compris dans les zones rigides.

b) Majorant de Q : méthode cinématique

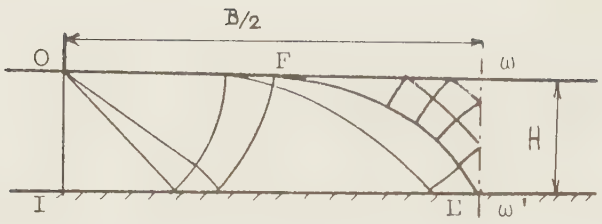
On détermine un champ de vitesses de déformation CPA, d'après le 2e théorème du § 4.6.1.5., on peut en déduire un majorant de Q. Le plus petit majorant sera la valeur pour laquelle la puissance des forces extérieures sera égale à la puissance dissipée.

Remarque : Le champ de contraintes associé n'a pas besoin d'être connu dans tout le système.

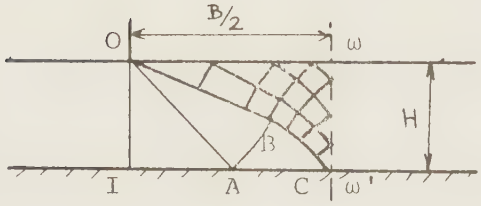
4.6.1.7. Manière pratique de traiter les problèmes

a) Problème statiquement déterminé : on possède une distribution de contraintes SPA dans les zones plastiques du système. Si on peut prolonger la solution dans tout le système, on en déduit un minorant de Q.

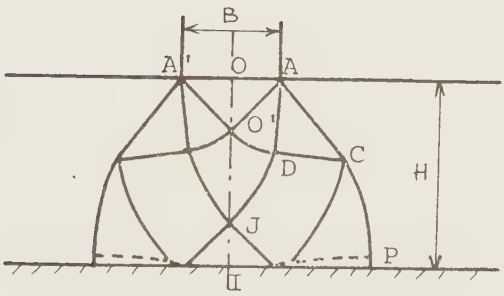
b) Solution incomplète : on possède une distribution des vitesses de déformation CPA dans tout le système. On possède donc un champ



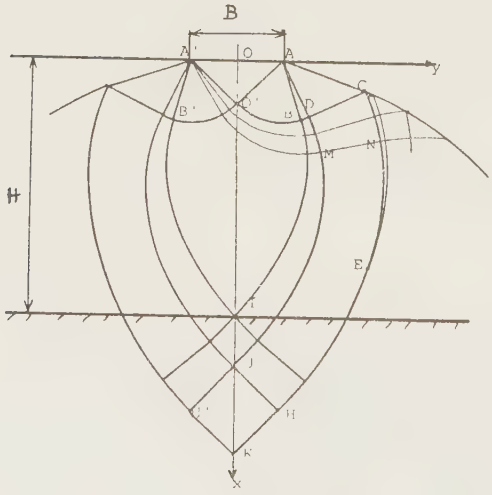
a) $0 < \frac{H}{B} < 0.137$



b) $0.137 < \frac{H}{B} < 0.5$



c) $0.5 < \frac{H}{B} < 2.65$



d) $2.65 < \frac{H}{B} < 4.36$

Fig. 4-13 : Théorie du poinçonnement d'une plaque répondant au critère de TRESCA ($\phi = 0°$). Champs statiques à la rupture pour différentes valeurs de $\frac{H}{B}$, d'après SALENÇON.

de contraintes licite dans toute la zone où ces vitesses sont non nulles (zone plastique). On en déduit un majorant de Q.

c) Solution complète : On peut prolonger le champ de contraintes en question dans la zone où les vitesses sont nulles (zone rigide) par une distribution licite. On en déduit que le majorant est égal au minorant, et on obtient la valeur exacte de Q.

Dans les deux exemples qui vont suivre, qui ont été traités par SALENÇON, on va s'efforcer de trouver des solutions complètes. Lorsque ce sera impossible, on fournira un majorant et un minorant de la charge.

4.6.2. Etude du poinçonnement d'une plaque

Ce problème avait déjà été abordé par JOHNSON et KUDO [40] avant l'étude complète de SALENÇON [83], [84] et [86].

4.6.2.1. Hypothèses

- Milieu bidimensionnel (déformations planes)
- Matériau répondant au critère de TRESCA ($\phi = 0$)
- Ecoulement initial
- Poinçon et substratum parfaitement rugueux ($m = m' = 1$)
- Plaque de largeur finie (déplacements latéraux possibles).

4.6.2.2. Déroulement des calculs

Il s'agit de compléter les travaux de HILL qui a fournit des solutions incomplètes (majorants de Q), en proposant des solutions complètes ou, sinon, des minorants de Q.

On distingue, à la rupture, 5 schémas différents suivant les valeurs de $\frac{H}{B}$. Dans tous les cas, on calcule Q en employant la méthode de résolution numérique aux différences finies, dite des caractéristiques (voir KRAVTCHENKO [46]) :

a) $0 < \frac{H}{B} < 0.137$: On propose une solution complète, donc la valeur de Q (figure 4-13-a).

b) $0.137 < \frac{H}{B} < 0.5$: Le schéma est différent du précédent, mais le résultat identique (figure 4-13-b).

c) $0.5 < \frac{H}{B} < 2.65$: HILL (figure 4-8 et 4-9) a calculé un majorant de Q, car la solution statique associée au champ cinématique n'a pu être prolongée dans les zones rigides. SALENÇON présente alors une série de solutions statiques complètes parmi lesquelles il cherche celle qui donne le plus grand minorant de Q (figure 4-13-c).

d) $2.65 < \frac{H}{B} < 4.36$: La solution incomplète de HILL peut être ici complétée (figure 4-13-d) et les valeurs de HILL sont celles de Q.

e) $\frac{H}{B} > 4.36$: On possède la solution classique de PRANDTL pour le milieu semi-infini, qui est une solution incomplète. BISHOP [5] a réussi à prolonger dans les zones rigides, par un champ statique licite le champ des contraintes associé au champ cinématique des zones plastiques. La valeur $N_{cH} = (2 + \pi)$ est donc une valeur exacte de Q.

4.6.2.3. Les résultats sont rassemblés dans la figure 4-14: N_{cH} est connu partout sauf pour $\frac{H}{B}$ compris entre 0.5 et 2.65 où l'on n'en possède qu'un encadrement.

4.6.2.4. Remarque personnelle :

L'allure de la courbe de la figure 4-14 est bien identique à celle des courbes proposées par VYALOV, et YAMAGUCHI et TERASHI (voir fig. 4-14) Ces auteurs ont donc résolu (d'une manière approximative) un problème, celui du poinçonnement d'une plaque, alors qu'ils pensaient en résoudre un autre, celui qui maintenant va retenir notre attention.

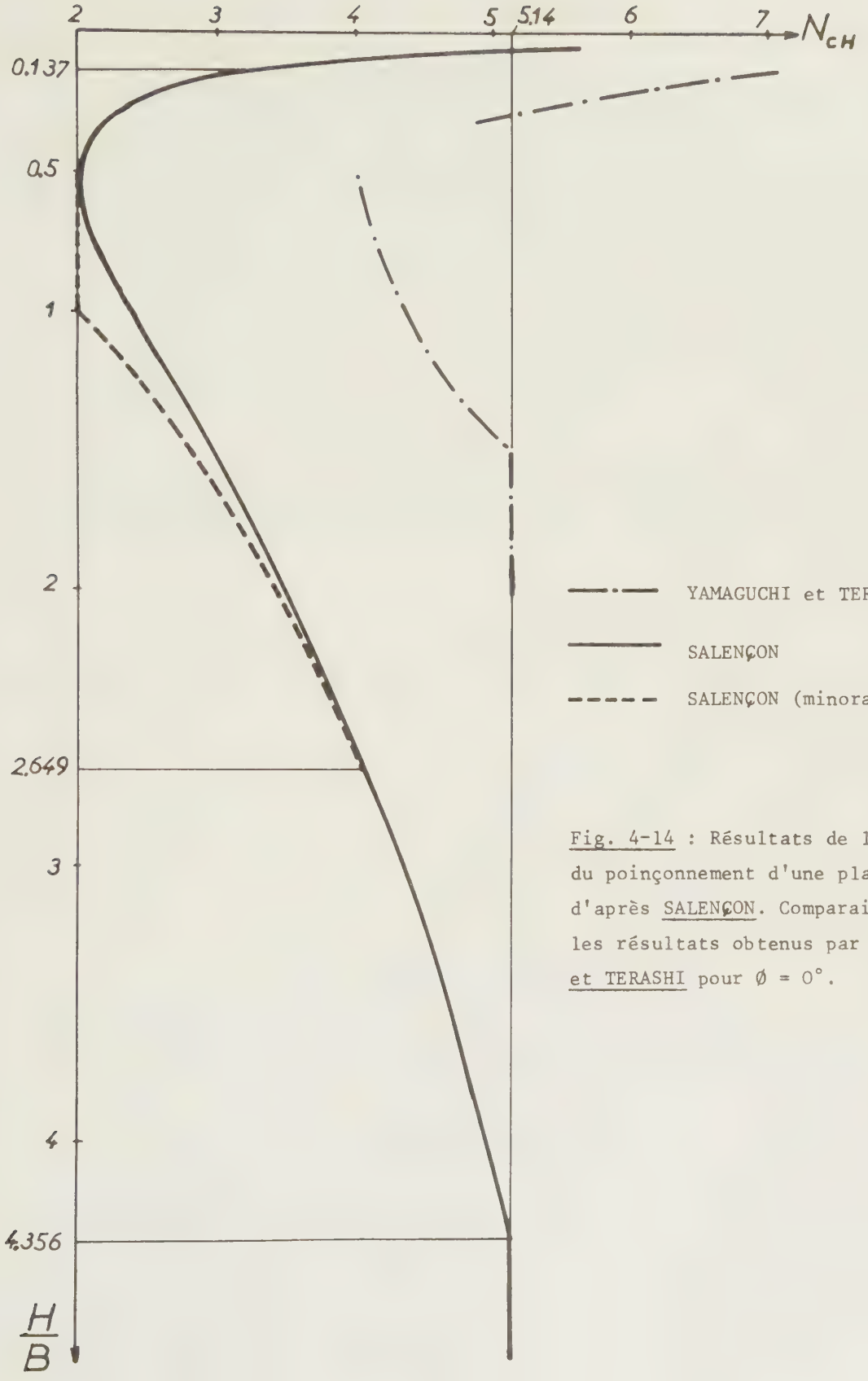


Fig. 4-14 : Résultats de la théorie du poinçonnement d'une plaque ($\phi = 0°$) d'après SALENÇON. Comparaison avec les résultats obtenus par YAMAGUCHI et TERASHI pour $\phi = 0°$.

4.6.3. Force portante limite d'une couche de sol d'épaisseur limitée

La répartition des contraintes normales sous la fondation et l'allure du réseau de bicaractéristiques avait déjà fait l'objet de travaux de COLLINS [16], mais l'étude complète de cette question figure dans les publications de SALENÇON [85] et [86], de MANDEL et SALENÇON [64] et [65-a] et de RADENKOVIC et SALENÇON [77].

Remarque : Dans tout ce qui suit, la fondation est parfaitement rugueuse.

4.6.3.1. Matériau de TRESCA ($\phi = 0$)

On possède une solution complète du problème, quelle que soit la rugosité m' de la semelle, pour une adhérence maximale à l'interface (m = 1).

a) Pour $\frac{H}{B} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le schéma d'écoulement (figure 4-15-a) est complété dans les zones rigides par un champ statique licite (figure 4-15-b).

b) Pour $\frac{H}{B} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

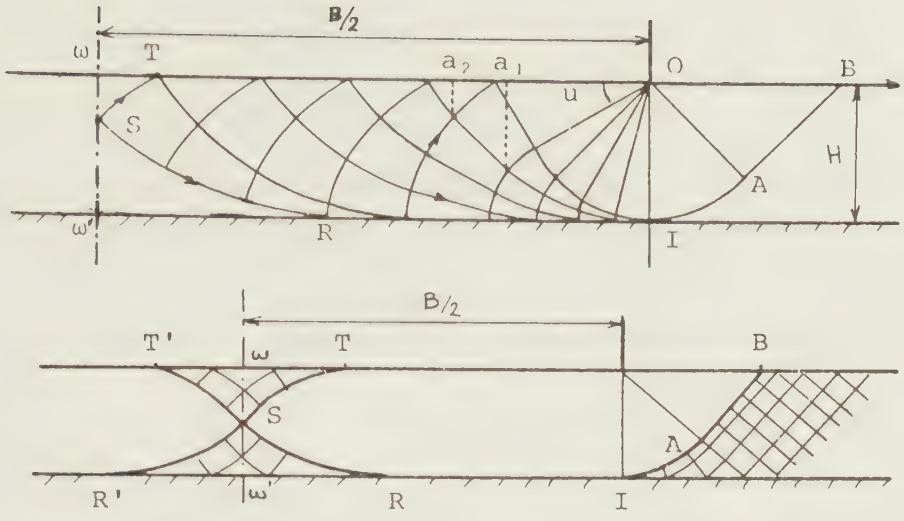
La solution de PRANDTL, complétée par BISHOP, convient, et donne également la valeur de Q. Sur la figure 4-16, on fournit les valeurs de N_{cH} pour différentes valeurs de m' et de $\frac{B}{H}$.

4.6.3.2. Matériau de COULOMB

Dans tout ce paragraphe, la fondation est supposée parfaitement rugueuse (contrainte inclinée de ϕ).

4.6.3.2.1. Déroulement des calculs

Il ne s'agit plus ici de donner des solutions exactes puisque le massif considéré ne répond pas au principe du travail maximal. D'autre part, on ne connait que le champ des contraintes dans la zone plastique à la rupture. On généralise donc le schéma de la figure 4-15-a au cas où les bicaractéristiques se coupent sous un angle $\frac{\pi}{2} - \phi$. La solution proposée est donc approchée. MANDEL et SALENÇON ont adopté le principe de superposition des états d'équilibre limite , conduisant à la formule de TERZAGHI :



a) Champ cinématique dans les zones plastiques.

b) Prolongement du champ statique dans les zones rigides.

Fig. 4-15 : Schéma de rupture d'une couche de sol d'épaisseur limitée. $\phi = 0°$, $m = 1, \forall m'$. D'après SALENÇON.

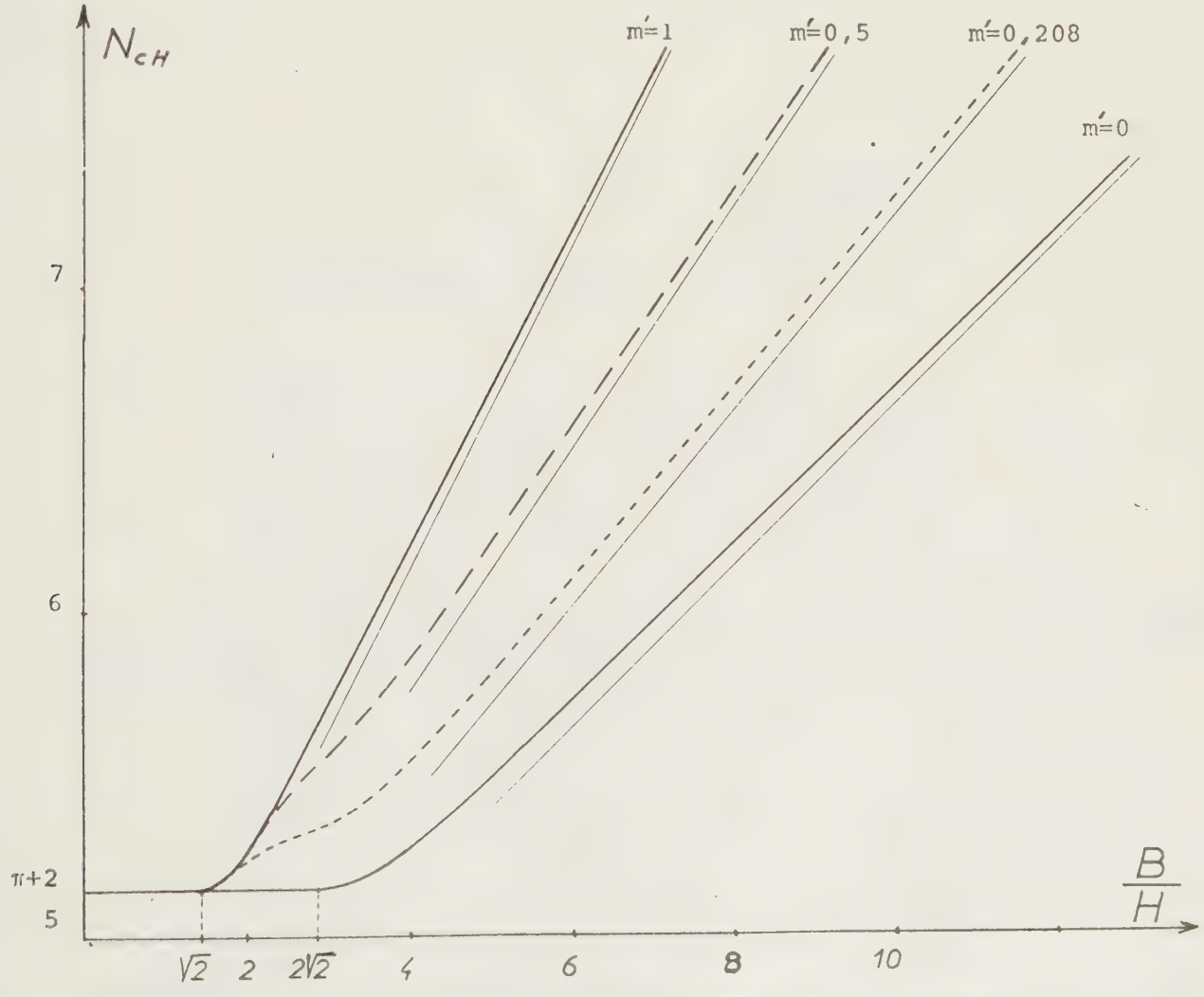


Figure 4-16 : Résultats de la théorie de SALENÇON : Terme de force portante d'une couche d'épaisseur limitée de sol purement cohérent ($\phi = 0°$). Interface parfaitement rugueux ($m = 1$). $N_{cH} = \frac{q}{c}$.

$$q = \frac{1}{2}\ \gamma . B . N_{\gamma H} + c . N_{cH} + q . N_{qH}$$

Cela nécessite la construction de deux réseaux de bicaractéristiques différents, l'un en milieu pesant pulvérulent sans surcharge pour le calcul de $N_{\gamma H}$, l'autre en milieu cohérent non-pesant avec surcharge pour N_{cH} et N_{qH}. On trouve, comme dans le cas du milieu semi-infini homogène :

$$N_{cH} = (N_{qH} - 1) . \text{cotg } \phi .$$

4.6.3.2.2. Résultats dans le cas où le frottement maximal est mobilisé à l'interface (contrainte inclinée de ϕ).

La figure 4-17 a montré l'allure du réseau de bicaractéristiques qui a permis de calculer le coefficient $N_{\gamma H}$.

Soit : $F_\gamma = \frac{N_{\gamma H}}{N_\gamma}$, $F_c = \frac{N_{cH}}{N_c}$ et $F_q = \frac{N_{qH}}{N_q}$

On peut tracer les courbes qui donnent F_γ, F_c et F_q en fonction de ϕ et de $\frac{B}{H}$ (figures 4-18, 4-19 et 4-20).

4.6.3.2.3. Résultats dans le cas où l'interface est lisse ($\sigma_t = 0$).

La figure 4-17-b montre l'allure du réseau de bicaractéristiques qui a permis de calculer les coefficients N'_{cH} et N'_{qH}.

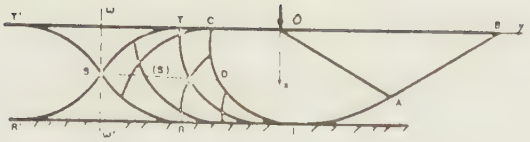
Soit : $F'_\gamma = \frac{N'_{\gamma H}}{N_\gamma}$, $F'_c = \frac{N'_{cH}}{N_c}$, $F'_q = \frac{N'_{qH}}{N_q}$

MANDEL et SALENÇON n'ont tracé que les courbes donnant F'_c et F'_q en fonction de ϕ et de $\frac{B}{H}$ (figures 4-19 et 4-20). F'_γ figurera dans une publication ultérieure [65-b].

4.6.3.2.4. Remarques

a) Les valeurs de référence N_γ , N_c, N_q

sont celles de LUNGREN et MORTENSEN [61] puisque les schémas de calcul choisis par ces auteurs sont identiques à ceux de MANDEL et SALENÇON pour les valeurs de $\frac{B}{H}$ telles que $F_q = F_c = F_\gamma = 1$.



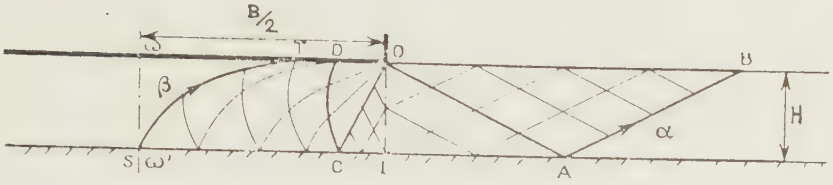


Fig. 4-17 : 2 Schémas de rupture d'après SALENCON

a) $\phi \neq 0°$, m = 1, $\gamma \neq 0$, c = 0 .
semelle parfaitement rugueuse .

b) $\phi \neq 0°$, m = 0, $\gamma = 0$, c $\neq$ 0.
semelle parfaitement rugueuse.

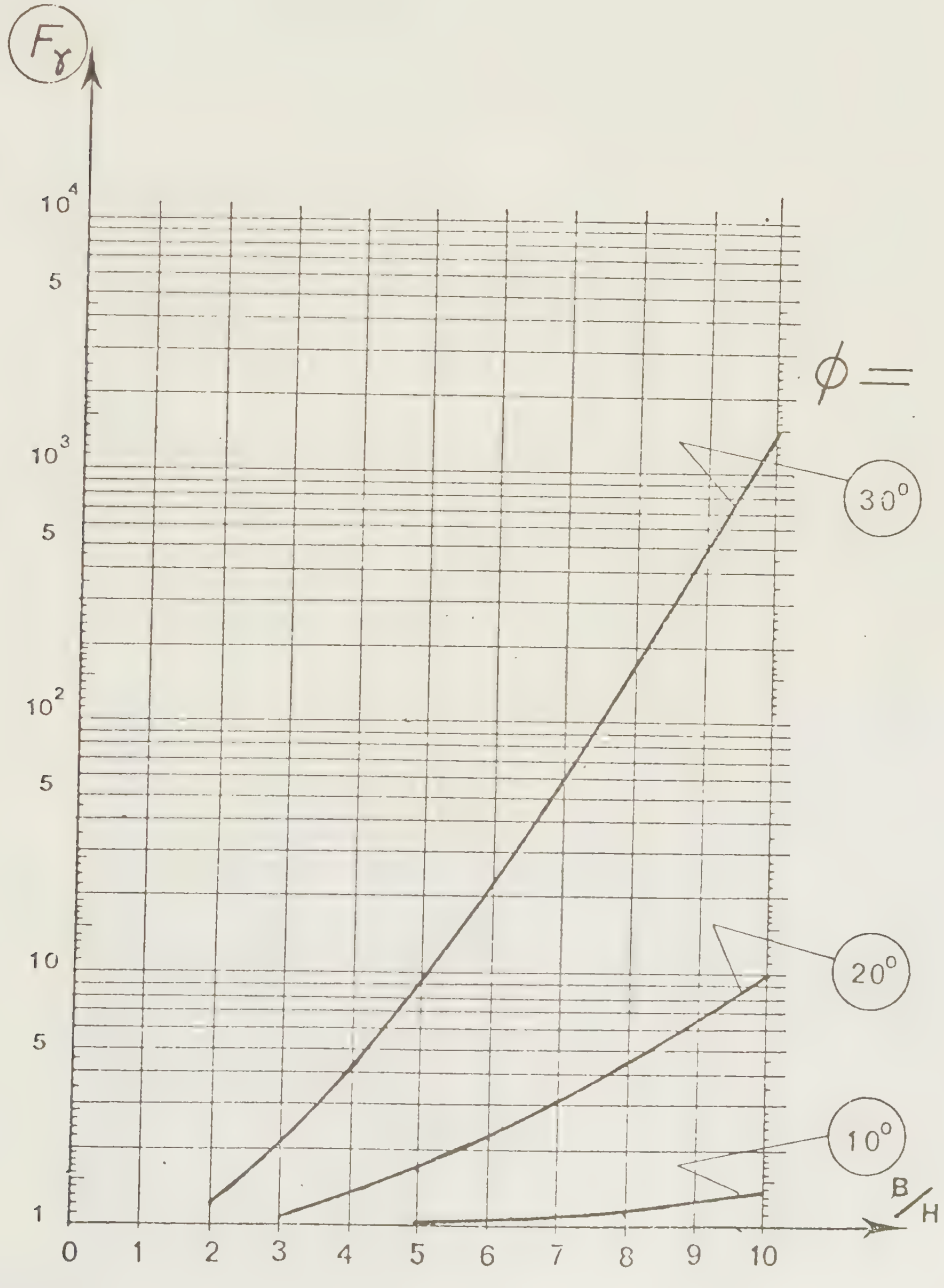


Fig. 4.18 : Résultats des travaux de SALENÇON présentés par GIROUD [64].

$F_\gamma = \frac{N_\gamma H}{N_\gamma}$. Semelle parfaitement rugueuse.

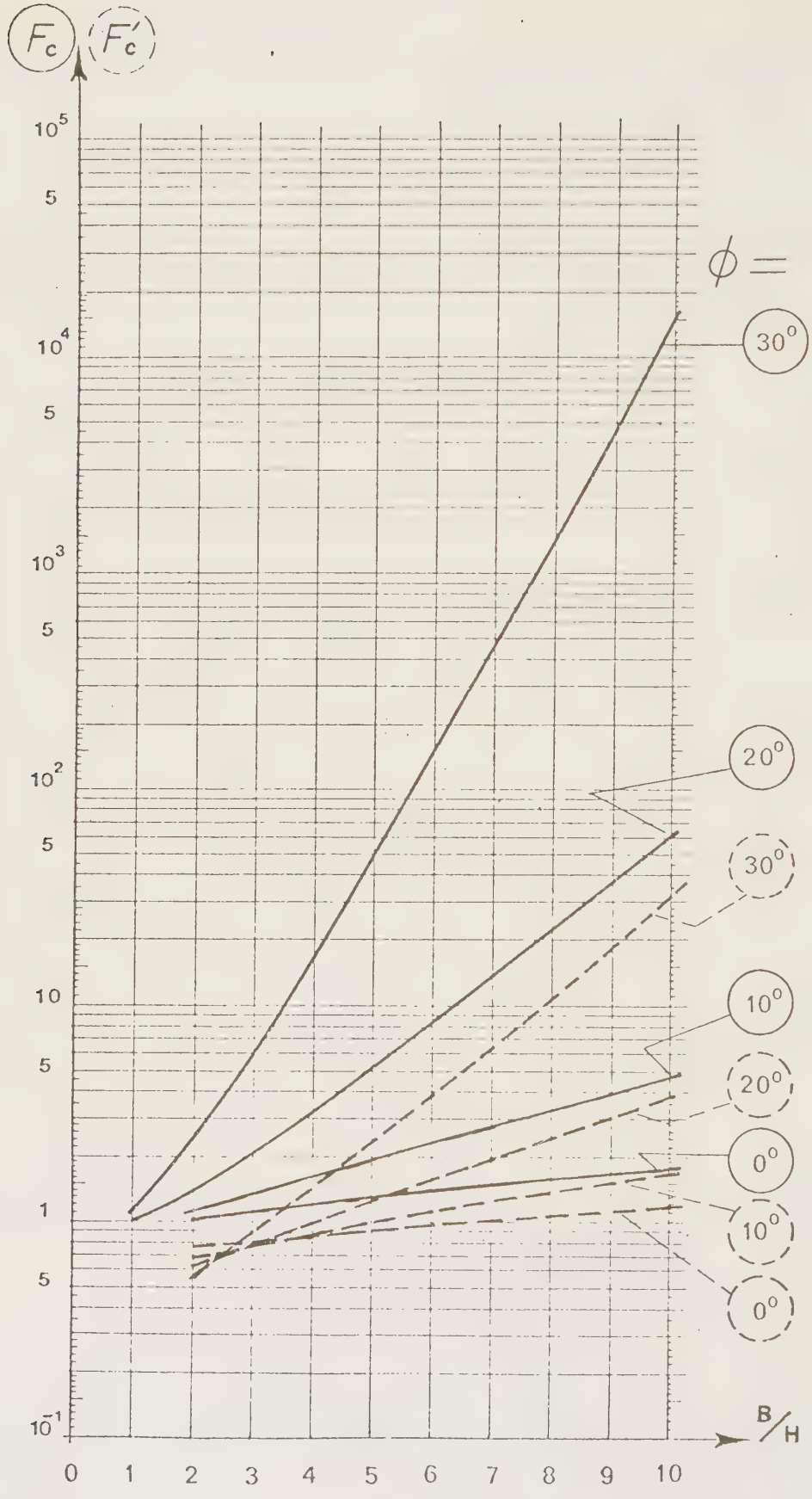


Fig. 4-19 : Résultats des travaux de SALENÇON présentés par GIROUD [64].

$F_c = \frac{N_{cH}}{N_c}$; $F'_c = \frac{N'_{cH}}{N_c}$ - Semelle parfaitement rugueuse.

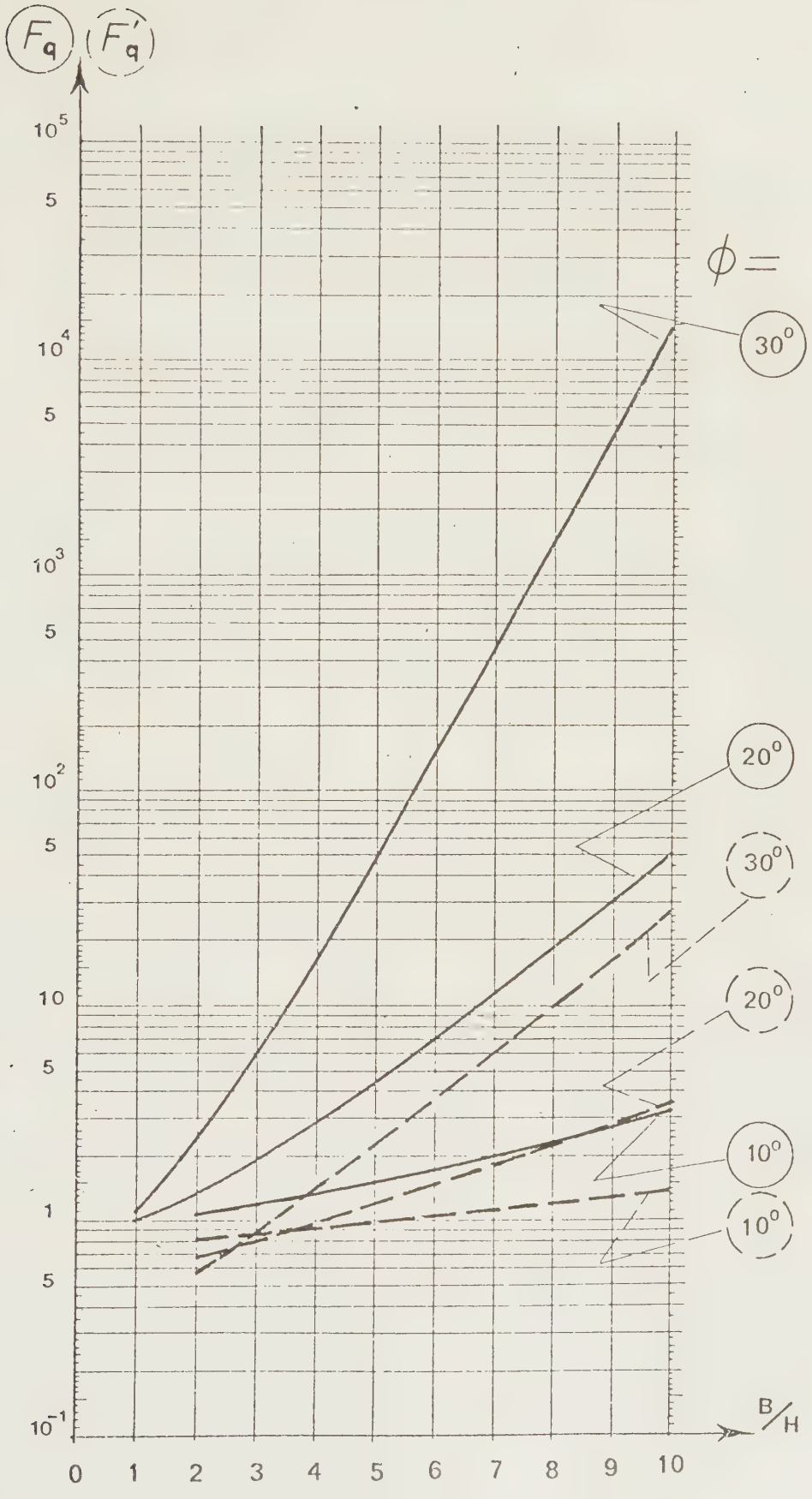


Fig. 4-20 : Résultats des travaux de SALENÇON , présentés par GIROUD [64].

$F_q = \frac{N_q H}{N_q}$; $F'_q = \frac{N'_q H}{N_q}$. Semelle parfaitement rugueuse.

b) Lorsque $\frac{B}{H} \to \infty$, les 2 familles de bicaractéristiques tendent vers les 2 familles de cycloïdes isogonales trouvées par HARTMANN [35], dans le cas où la charge est de largeur infinie .

En particulier, pour $\phi = 0$, la solution est explicite et

$$N_{cH} \longrightarrow 1 + \pi + \frac{B}{2H}$$

$$N'_{cH} \longrightarrow 1 + \pi + \frac{B}{4H}$$

c) Dans le cas où l'interface est lisse, on s'aperçoit qu'il existe des valeurs de F'_c et F'_q inférieures à 1 (figures 4-19 et 4-20). MANDEL et SALENÇON publieront dans [65-b] les valeurs de ces rapports pour $\frac{B}{H} < 2$. Il est pourtant certain que les courbes représentant F'_c et F'_q doivent présenter des minima pour des valeurs de $\frac{B}{H}$ comprises entre 0 et 2, puis atteindre la valeur 1 pour des valeurs suffisamment petites de $\frac{B}{H}$.

d) Lors du calcul de N_{cH} ($\gamma = 0$, pas de surcharge), on applique le théorème des états correspondants dû à CAQUOT, qui consiste à remplacer la cohésion par la surcharge normale d'intensité c. cotg ϕ.

Si cette substitution traduit fidèlement l'état de contrainte en un point du massif, il n'en est pas de même pour les conditions de rugosité à l'interface et sous la fondation : les contraintes fictives y sont inclinées de ϕ (figure 4-17 a) ou normales (figure 4-17 b), quelles que soient les valeurs des coefficients d'adhérence m et m', ce qui semble physiquement paradoxal.

4.7. CONCLUSION DU CHAPITRE IV

4.7.1. Comparaison des résultats proposés par les différents auteurs

Sur la figure 4-21, nous avons comparé les valeurs expérimentales de HAERINGER (essais sur rouleaux), avec les résultats de la théorie développée par SALENÇON et ceux donnés par les cercles de glissement (Chapitre 2) pour $\phi = 26°$ et $c = 0$. Si les valeurs de SALENÇON sont en bonne concordance avec la courbe expérimentale, il n'en est pas de même des nôtres, qui sont beaucoup trop fortes. Ceci est dû à l'extrême importance que revêt la répartition des contraintes sur la fondation lorsque la ligne de glissement circulaire est astreinte à ne pas descendre au-dessous de la profondeur H.

Aussi le choix d'une répartition non uniforme des contraintes sous la semelle, entrainant un excentrement de la charge, est-il très judicieux. Nous comparons ainsi sur la figure 4-22 : les résultats de M.A. SENS, (voir § 4.2.2) obtenus avec une charge non-uniforme, la rupture se produisant suivant un ou deux cercles (fig.4-6), ceux de l'abaque n°1 de l'Annexe II, obtenus par BUTTON avec une charge uniforme, ceux des essais réalisés par HABIB et par BROWN, et ceux de SALENÇON, ceci pour un même sol purement cohérent ($\phi = 0°$).

Ici encore, les valeurs obtenues grâce à la méthode du chapitre 2 (BUTTON) sont beaucoup plus grandes que celles de SALENÇON. Par contre, celles calculées par M.A. SENS avec un seul cercle sont proches des résultats donnés par la théorie de la plasticité. Remarquons que pour un sol purement cohérent nos valeurs sont très voisines des valeurs expérimentales.

Sur la figure 4-23, nous avons porté les résultats expérimentaux de KANANYAN, les valeurs fournies par MANDEL et SALENÇON pour un interface parfaitement rugueux, ainsi que nos résultats du chapitre 2, pour $\phi = 38°$

4.7.2. Fondation sur une couche de sol purement cohérent d'épaisseur limitée, au voisinage d'une tranchée

Nous pouvons utiliser les résultats de la théorie du poinçonnement d'une plaque au cas d'une couche de sol qui serait limitée latéralement

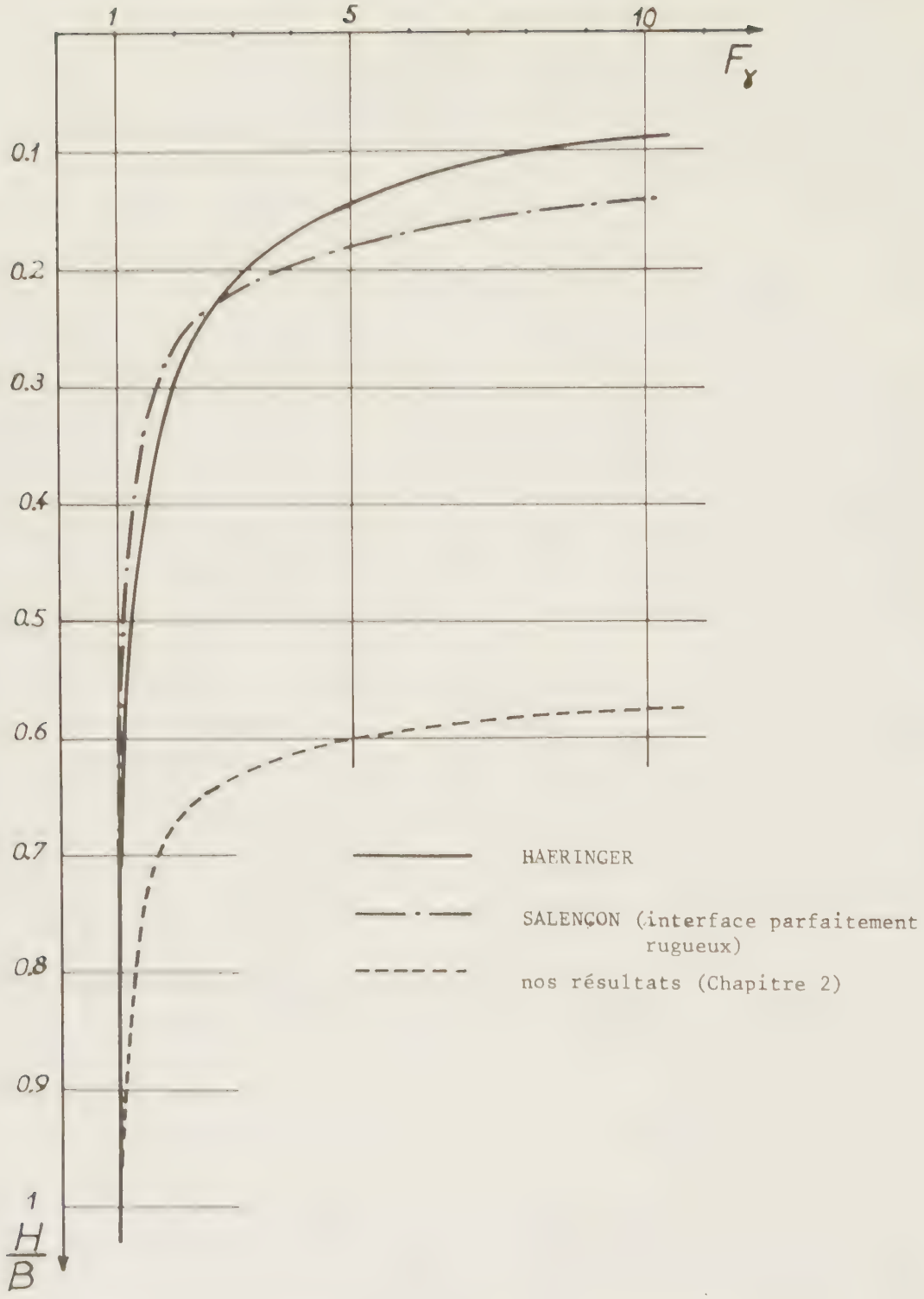


Figure 4-21 : Comparaison de la théorie développée par SALENÇON, des essais de HAERINGER et de nos résultats pour $\phi = 26°$ et $c = 0$

$$F_\gamma = \frac{N_{\gamma H}}{N_\gamma}$$

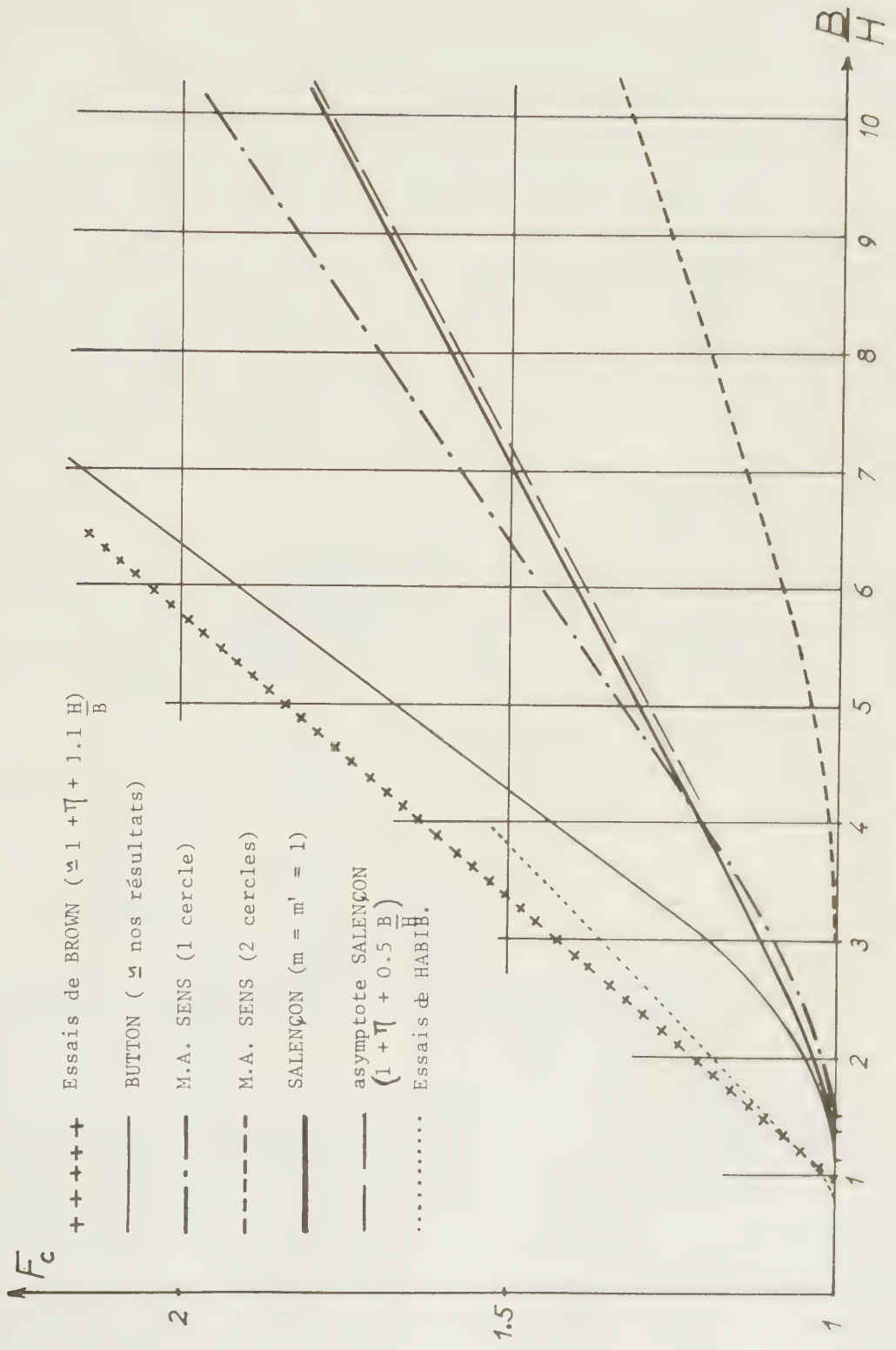


Fig. 4-22 : Comparaison des résultats théoriques obtenus suivant différentes méthodes avec les essais de HABIB et de BROWN, pour un matériau purement cohérent ($\phi = 0°$)

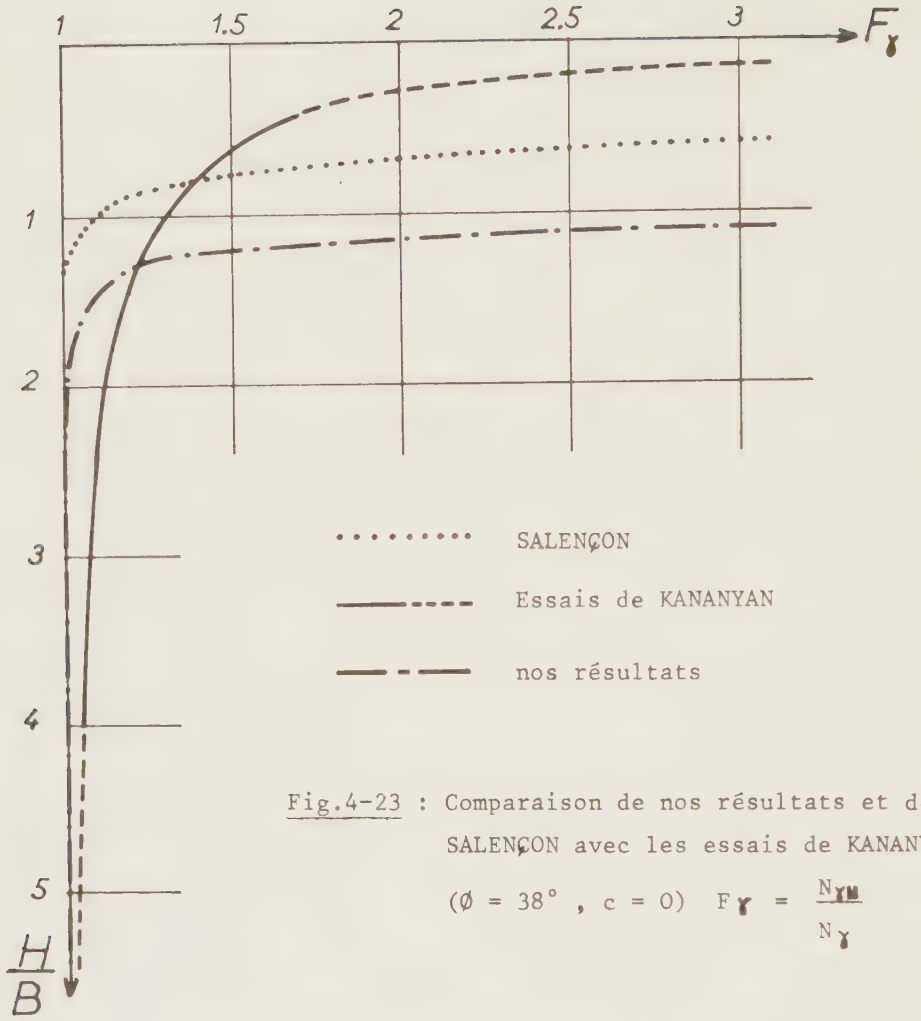


Fig.4-23 : Comparaison de nos résultats et de ceux de SALENÇON avec les essais de KANANYAN

($\phi = 38°$, $c = 0$) $F_\gamma = \frac{N_{\gamma u}}{N_\gamma}$

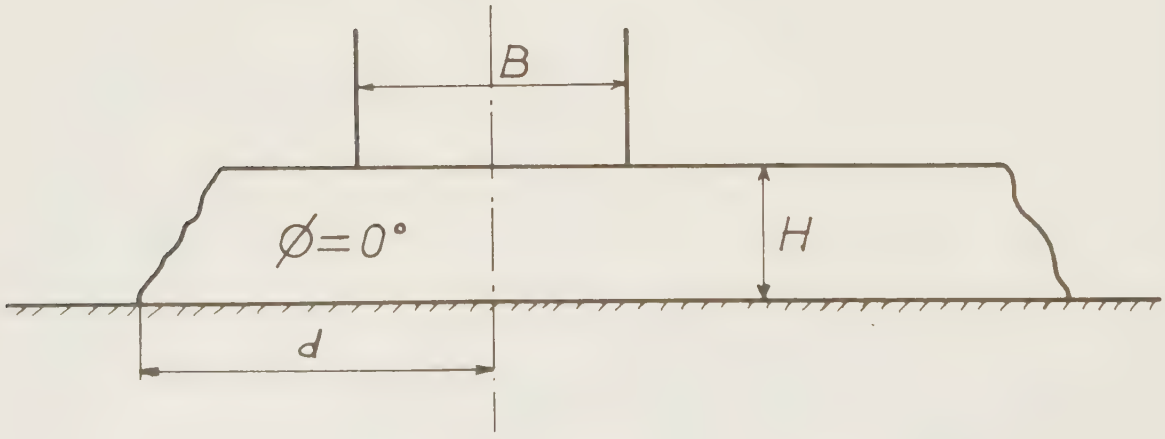


Fig. 4-24 : Fondation sur une couche de sol purement cohérent d'épaisseur limitée, au voisinage d'une tranchée.

de façon à ce que les déplacements horizontaux soient possibles. C'est le cas où une tranchée de profondeur H est creusée d'un côté de la fondation. S'il existe deux tranchées, de part et d'autre de la fondation, on ne tiendra compte que de celle dont la distance d à l'axe est la plus faible : figure 4-24. En effet, la rupture se produit pour une charge supérieure ou égale à celle obtenue en prenant 2 tranchées symétriquement disposées à la distance d de l'axe.

Nous avons vu, d'après le schéma dû à HILL [36] que lorsqu'un poinçon pénètre dans une plaque avec une vitesse u, les deux blocs rigides situés de chaque côté du bulbe plastique avaient une vitesse $u.\frac{B}{2H}$ (ce qui est évident si l'on sait que le matériau est incompressible). SALENÇON est arrivé au même résultat dans le cas de chacun des 4 schémas cinématiques nécessités pour résoudre le problème du poinçonnement d'une plaque (figures 4-13), c'est-à-dire pour $0 < \frac{H}{B} < 4.36$.

D'autre part, le terme N_{cH} (figure 4-14) a été calculé sans tenir compte de la puissance dissipée par frottement entre le matériau rigide et le substratum. Ecrivons que la puissance des forces extérieures est égale à la puissance dissipée. Soit $\overline{Q}$ la force portante limite et $\overline{N_{cH}} = \frac{\overline{Q}}{c.B}$. Il vient :

$$\mathcal{P}_{(\overline{Q})} = \mathcal{P}_{\text{dissipée dans le matériau}} + \mathcal{P}_{\text{dissipée à l'interface}}$$

Si l'adhérence est maximale à l'interface :

$$\overline{N_{cH}}.\ B.\ c.\ u = N_{cH}.\ B.\ c.\ u + 2\ d.\ c.\ u.\ \frac{B}{2H}$$

Soit :

$$\overline{N_{cH}} = N_{cH} + \frac{d}{H}$$

Remarques

a) Le terme N_{cH} n'est pas connu pour :

$$0.5 < \frac{H}{B} < 2.65 \qquad \text{(voir figure 4.14)}$$

En effet, dans cette zone on n'en connait qu'un minorant et un majorant. Dans un souci de sécurité, il faut utiliser le minorant, à moins d'interpoler.

b) D'après le calcul ci-dessus, les blocs rigides reposent sur le substratum sur une largeur $2d$. Ceci est exact pour $0.5 < \frac{H}{B} < 4.36$, mais n'est plus vrai pour $0 < \frac{H}{B} < 0.5$ (voir figures 4.13). Dans cette dernière zone $\overline{N_{cH}}$ est donc donné par excès. Nous ne pouvons donner la valeur exacte de la largeur de la base des blocs rigides, valeur non explicite. Nous pouvons, par contre, préciser que cette valeur est supérieure à $2d - B$. Comme plus haut, il faut utiliser le minorant :

$$\overline{N_{cH}} = N_{cH} + \frac{2d - B}{2H}$$

c) Pour $\frac{H}{B} > 0.5$, il faudra limiter $\overline{N_{cH}}$ à 5.14, valeur à partir de laquelle la rupture se fait suivant le schéma classique de PRANDTL.

En résumé, la pression portante limite d'une fondation non enterrée, située au voisinage d'une tranchée de profondeur H et reposant sur une couche d'épaisseur limitée d'un sol purement cohérent peut être calculée par : $q = c\,\overline{N_{cH}}$.

Avec, pour :

- $\frac{H}{B} < 0.5$: $\overline{N_{cH}} = N_{cH} + \frac{2d - B}{2H}$.

- $\frac{H}{B} > 0.5$: $\overline{N_{cH}} = \text{inf.} \left(N_{cH} + \frac{d}{H}, \pi + 2\right)$.

N_{cH} étant pris sur la courbe basse de la figure 4-14.

CHAPITRE V

FORCE PORTANTE D'UN SOL PUREMENT COHERENT

ET VERTICALEMENT NON-HOMOGENE

PLAN DU CHAPITRE V

5.1 - Notations du chapitre V ..... p. 137
5.2 - Introduction ..... p. 139
5.3 - Travaux expérimentaux ..... p. 140
5.4 - Calcul de la force portante limite en faisant l'hypothèse d'une ligne de glissement circulaire ..... p. 145
5.5 - Travaux utilisant la théorie du corps rigide - parfaitement plastique non-homogène ..... p. 153
5-6 - Conclusion du chapitre V ..... p. 168

5.1 NOTATIONS DU CHAPITRE V

B : largeur de la fondation

F : coefficient empirique caractérisant la surconsolidation de surface

H : hauteur de la couche supérieure

K : valeur minimale de c_2 pour que la zone de rupture ne s'étende que dans la couche supérieure

K' : minorant de K

L : ligne séparant deux milieux de cohésions différentes

N_{co}, N_{c1}, N_{c2} : $\frac{q}{c_o}$, $\frac{q}{c_1}$, $\frac{q}{c_2}$, respectivement

Q : force portante limite

c_o : cohésion à la surface (cas du milieu stratifié)

c_1 , c_2 : cohésions des couches supérieure et inférieure, respectivement

c_u : cohésion mesurée au cours d'un essai de compression simple

c : cohésion

c_μ , c_ν : cohésions dans les régions μ et ν , respectivement

c' : terme variable d'une cohésion non-homogène

j, k : coefficients expérimentaux de BROWN

m : coefficient d'adhérence de l'interface

m' : coefficient d'adhérence de la fondation

p : contrainte normale sous la fondation

q : pression portante limite

q' : majorant de q

r : rayon du cercle de glissement

s_α , s_β : abscisses curvilignes des bicaractéristiques

s : enfoncement de la semelle / B

t : contrainte tangentielle sous la fondation

v : vitesse de déplacement

v_α , v_β : composantes de v sur les lignes bicaractéristiques

$v_{\alpha o}$, $v_{\beta o}$: valeurs de v_α et v_β en milieu homogène

x, y : directions horizontale et verticale descendante, respectivement

α : coefficient empirique caractérisant la surconsolidation de surface

β : coefficient adimensionnel caractérisant l'augmentation de la cohésion avec la profondeur

γ : poids volumique

δ : inclinaison de la contrainte sur la normale à la facette

ε : nombre adimensionnel petit

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: composantes du tenseur-déformation

$\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{yz}$: composantes du tenseur-vitesse de déformation

φ : angle de la normale à L avec l'axe des x

φ_μ, φ_ν : angles de la contrainte principale majeure avec l'axe des x, dans les milieux μ et ν, respectivement

σ : pression moyenne

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: composantes du tenseur-contrainte

σ_o : valeur de σ en milieu homogène

σ_μ, σ_ν : valeur de σ dans les régions μ et ν, respectivement

θ' : demi-ouverture du cercle de glissement

θ : angle d'une bicaractéristique α avec l'axe des x

θ_o : valeur de θ en milieu homogène

θ_μ, θ_ν : valeur de θ dans les milieux μ et ν, respectivement

χ : valeur de θ lors de la "réfraction limite".

5.2 INTRODUCTION

Le sol étudié dans ce chapitre est purement cohérent et sa cohésion varie avec la profondeur. Ce cas se rencontre très souvent dans la nature : que le sol soit composé de deux couches d'argile de cohésions approximativement constantes c_1 et c_2, ou qu'il soit stratifié, la cohésion augmentant avec la profondeur, ou encore qu'il soit composé de plusieurs couches d'argiles différentes et stratifiées.

Un cas aussi fréquent a bien entendu suscité de nombreux travaux. Dès 1953 BUTTON proposa d'appliquer la méthode des cercles de glissement au calcul de la force portante d'un tel sol.

On verra que ses résultats sont en définitive extrèmement intéressants, quand on les compare aux importants travaux expérimentaux menés récemment au Canada par BROWN et MEYERHOF.

Depuis plusieurs années, à l'Ecole Polytechnique de Paris et à l'Institut des Problèmes Fondamentaux de Varsovie, des études théoriques du corps rigide - parfaitement plastique non-homogène ont été menées, parallèlement.

Il y a peu de temps, elles ont débouché, par l'emploi de la méthode des caractéristiques, sur des résultats intéressant la Mécanique des Sols.

5.3 TRAVAUX EXPERIMENTAUX

5.3.1. Travaux de TCHENG

5.3.1.1. Généralités

Les essais sur double couche cohérente réalisés au C.E.B.T.P. sont rapportés dans la thèse de TCHENG [106] et leurs résultats analysés dans un article de MILOVIC [69].

5.3.1.2. Matériaux

TCHENG n'a étudié que le cas où la couche supérieure est plus dure que la couche inférieure. Il a utilisé une argile grasse consolidée ($c_1 \simeq 500$ g/cm^2) reposant sur une graisse consistante ($c_2 \simeq 16$ g/cm^2).

5.3.1.3. Appareillage - Mesures

Nous ne reviendrons pas ici sur les descriptions déjà faites au paragraphe 3.3.1.3.

5.3.1.4. Résultats

Ils sont représentés sur la figure 5.1 où TCHENG les compare aux valeurs données par BUTTON (voir § 5.4.1), à celles calculées en milieu bicouche grâce au schéma de PRANDTL (droites à 45° et quarts de cercles, c'est le schéma classique en milieu semi-infini homogène), et à celles fournies par la formule suivante immédiatement déduite de l'hypothèse du poinçonnement vertical de la couche supérieure :

$$q = \frac{2H}{B} \cdot c_1 + (2 + \pi) \cdot c_2$$

5.3.1.5. Remarques

Les droites représentant l'équation ci-dessus dans les axes $\frac{q}{c_1} = N_{c1}$ et $\frac{H}{B}$ sont assez proches des valeurs de BUTTON (voir figure 5-18). Mais ceci, comme le remarque MILOVIC [69, figures 7 et 8], à condition de se limiter au

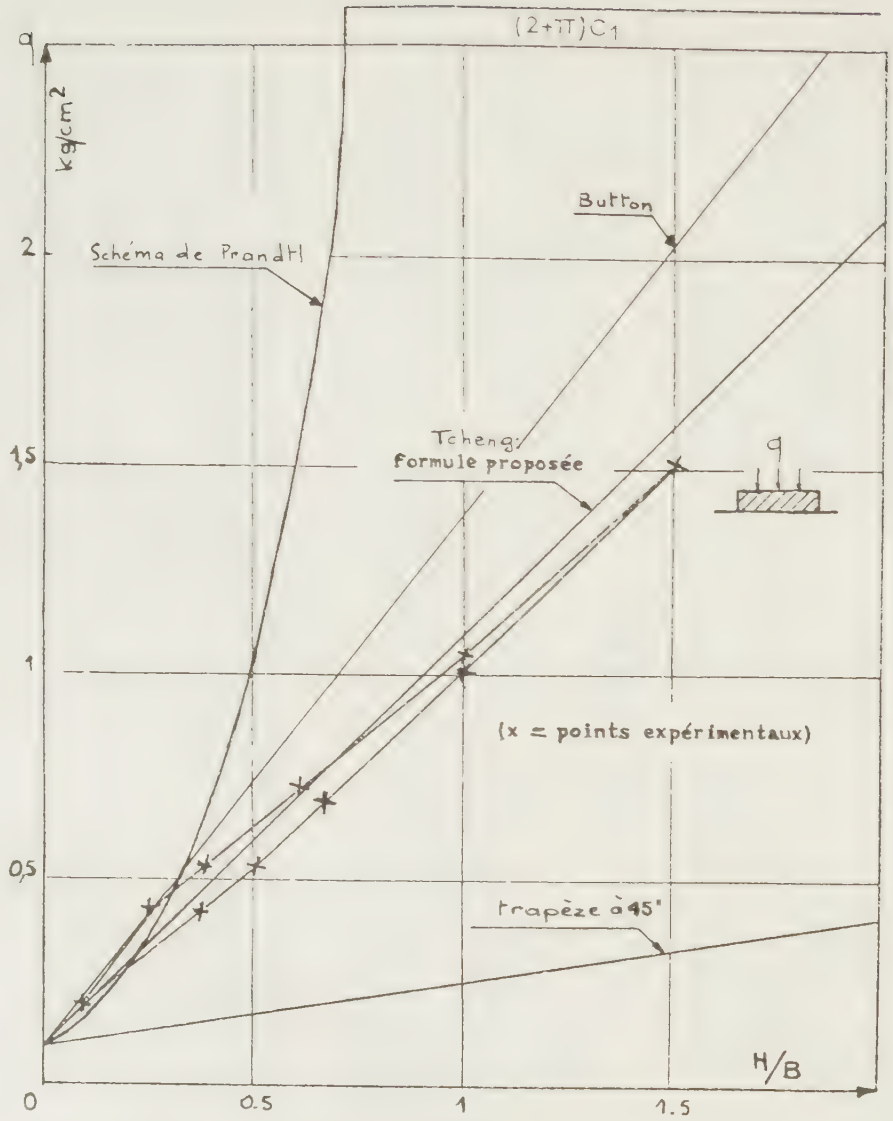


Fig. 5-1 : Résultats expérimentaux (x) et formule de TCHENG, comparés avec diverses autres méthodes de calcul, $c_1 = 500\ g/cm^2$; $c_2 = 16\ g/cm^2$

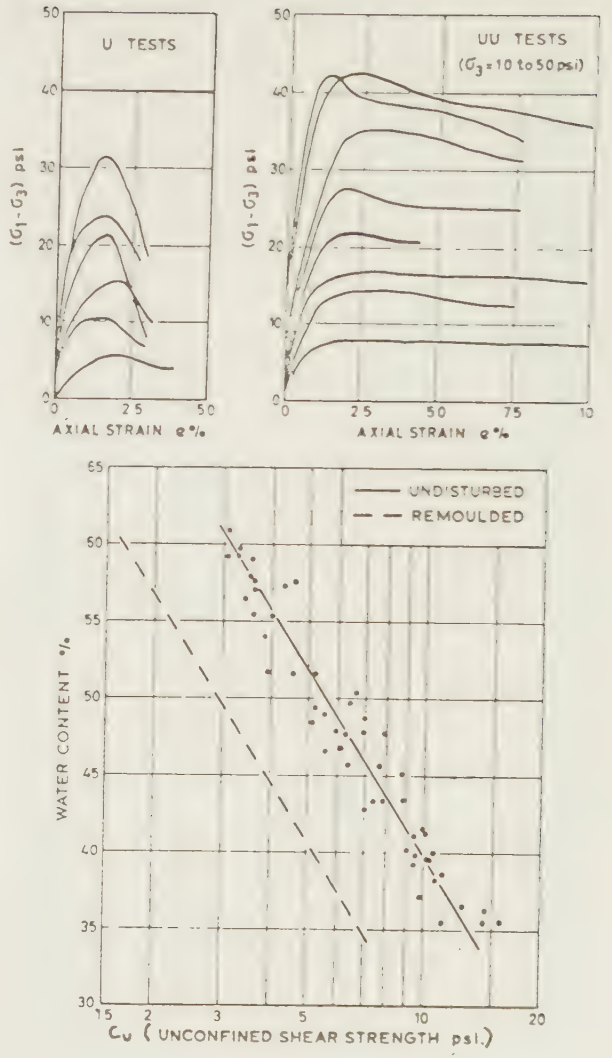


Fig. 5-2 : Essais de BROWN

U : Compression simple

UU : Triaxial, non consolidé et non drainé.

domaine où $c_2 < c_1$ et à des valeurs de $\frac{H}{B}$ d'autant plus faibles que le rapport $\frac{c_2}{c_1}$ est proche de 1.

5.3.2. Travaux de BROWN et MEYERHOF

5.3.2.1. Généralités

Les essais que nous allons décrire ont été réalisés à l'occasion de la thèse de Ph. D. de J.D. BROWN [8] , à l'Université de Halifax au Canada, sous la direction de MEYERHOF. Ils sont résumés dans une communication de BROWN et MEYERHOF [9] . Parallèlement au modèle bidimensionnel, des essais,dont nous ne parlerons pas, ont été réalisés en axisymétrie.

5.3.2.2. Matériau

Une argile inorganique de plasticité moyenne, à Illite prédominante a été utilisée. On lui a ajouté environ 2% de son poids sec de chaux hydratée. On a pu obtenir un degré de saturation de 95%. Les différentes cohésions, mesurées par des essais de compressions simples et des essais triaxiaux non consolidés - non drainés, ont été obtenus en faisant varier la teneur en eau (Figure 5-2). Il n'est pas précisé si le degré de saturation a été gardé constant.

5.3.2.3. Appareillage - Mesures

La cuve d'essai a pour dimensions 68.5 x 15.2 x 30.5 cm et la semelle(rigide et rugueuse) a une largeur de 7.6 cm.

L'interface a été rendue rugueuse par des stries et étanche à l'eau par un revêtement de latex.

On a relevé les courbes donnant l'enfoncement en fonction de la pression exercée sur la semelle. Ces courbes présentent, le plus souvent un pic et un palier (à ce sujet, voir les figures 7-1 à 7-10 de la thèse de BROWN).

On a effectué des essais, sur milieu homogène pouvant être considéré comme semi-infini, de façon à déterminer des coefficients j et k destinés à corriger les valeurs expérimentales de q :

j est appliqué à la cohésion c_{1u} mesurée sur un essai de compression simple,
k est appliqué à l'enfoncement relatif s ($s = \frac{\text{enfoncement}}{B}$) .

Ces 2 coefficients sont donc tels que la valeur de q ainsi corrigée soit la valeur théorique : $q = 5.14\ C_u$ du milieu homogène.

On en déduit, en milieu homogène :

$$5.14 = \left[N_c\right]_{exp} . (1 + ks) . j$$

et en milieu bicouche :

$$N_{c1} = \left[N_{c1}\right]_{exp} . j . (1 + ks)$$

On a également mesuré une légère anisotropie du matériau et on a relevé la forme des lignes de rupture. BROWN et MEYERHOF en déduisent que l'argile doit présenter, dans les conditions d'essais, un angle de frottement interne, non nul ($\phi \backsimeq 10°$).

5.3.2.4. Résultats

Deux séries d'essais ont été effectuées :

- pour $c_1 > c_2$ le rapport des cohésions a varié de $0.2 < \frac{c_2}{c_1} \leqslant 1$

- pour $c_1 < c_2$, ce rapport a varié de 1 à l'infini (substratum rigide).

L'ensemble des courbes moyennes (N_{c1} en fonction de $\frac{H}{B}$ et de $\frac{c_2}{c_1}$) obtenues à partir des points expérimentaux, est représenté sur la figure 5-3.

5.3.2.5. Remarques

Rappelons que les résultats obtenus lorsque c_2 est infini (substratum rigide) ont déjà été présentés au § 4.3 et comparés avec d'autres valeurs théoriques et expérimentales sur la figure 4.22.

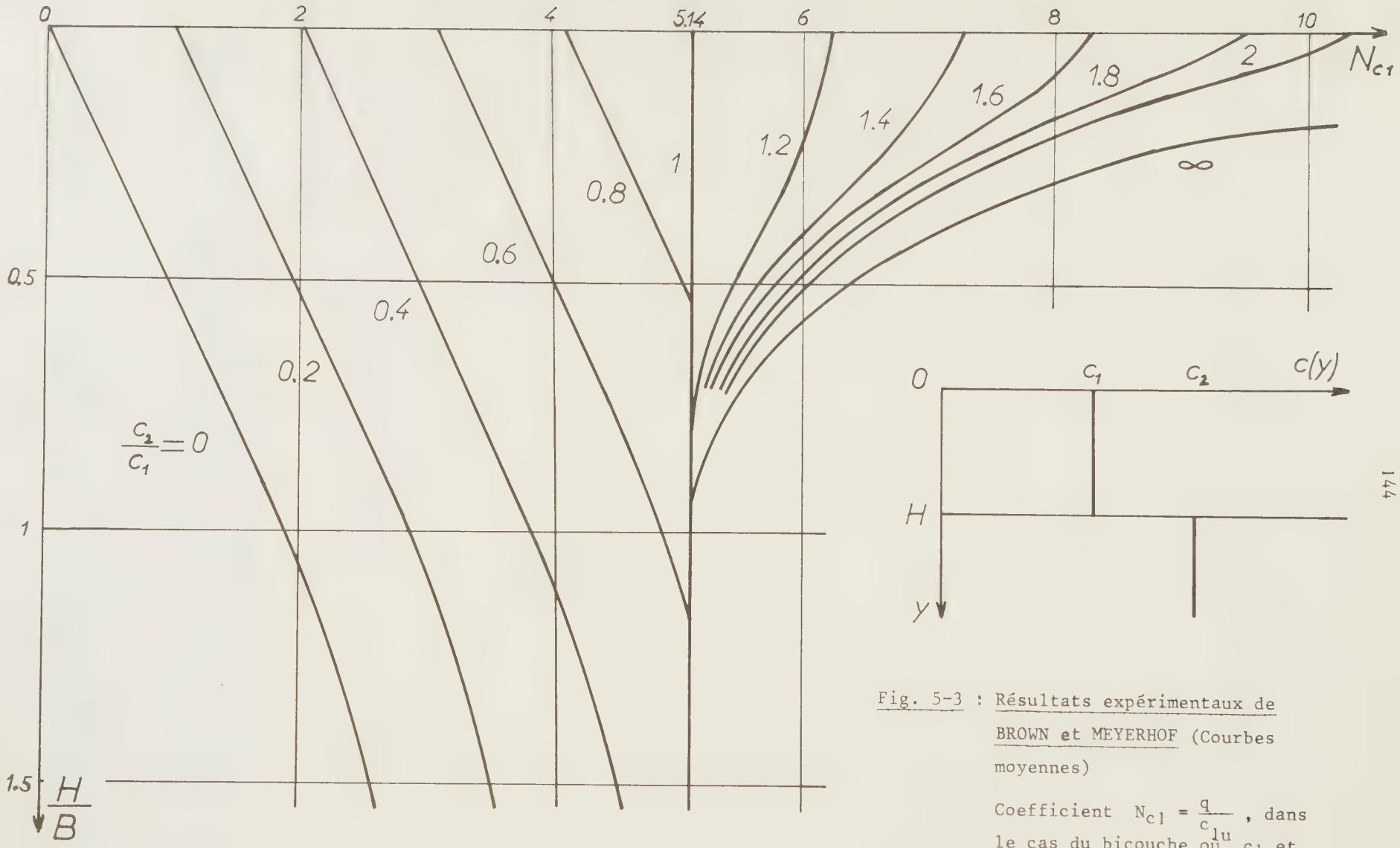


Fig. 5-3 : Résultats expérimentaux de BROWN et MEYERHOF (Courbes moyennes)

Coefficient $N_{c1} = \frac{q}{c_{1u}}$, dans le cas du bicouche où c_1 et c_2 sont des constantes.

5.4 CALCUL DE LA FORCE PORTANTE LIMITE, EN FAISANT L'HYPOTHESE D'UNE LIGNE DE GLISSEMENT CIRCULAIRE

5.4.1. Travaux de BUTTON

5.4.1.1. Généralités

BUTTON [10] a été le premier, dès 1953, à proposer une méthode de calcul de la force portante limite d'un sol bicouche en prenant l'hypothèse simplificatrice d'une ligne de glissement circulaire. Le calcul est entièrement explicite et l'auteur l'a appliqué à 2 types de sols purement cohérents : les cohésions des 2 couches sont constantes (c_1 et c_2) ou bien la cohésion de la première couche varie linéairement de c_o (en surface) à c_2 (à la profondeur H), valeur qui reste ensuite constante (Figures 5-4 et 5-5).

5.4.1.2. Hypothèses

- Sol purement cohérent : $\phi = 0°$.

- Cohésions réparties suivant les schémas des figures 5-4 ou 5-5 .

- Cercle de glissement passant par le bord de la fondation .

- Charge centrée.

5.4.1.3. Déroulement des calculs

L'auteur fait le bilan des moments des forces qui agissent sur le cercle. Il analyse plusieurs cercles et choisi celui qui donne la valeur minimale pour la force portante.

On en déduit l'équation (voir § 2.3.3) :

$$\frac{Q}{c_1} = \frac{2r^2\left[\theta' + \left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right).\Psi\right]}{r.\sin\theta' - \frac{B}{2}}$$

avec $\Psi = \text{Arcos}\left(\cos\theta' + \frac{H}{r}\right)$

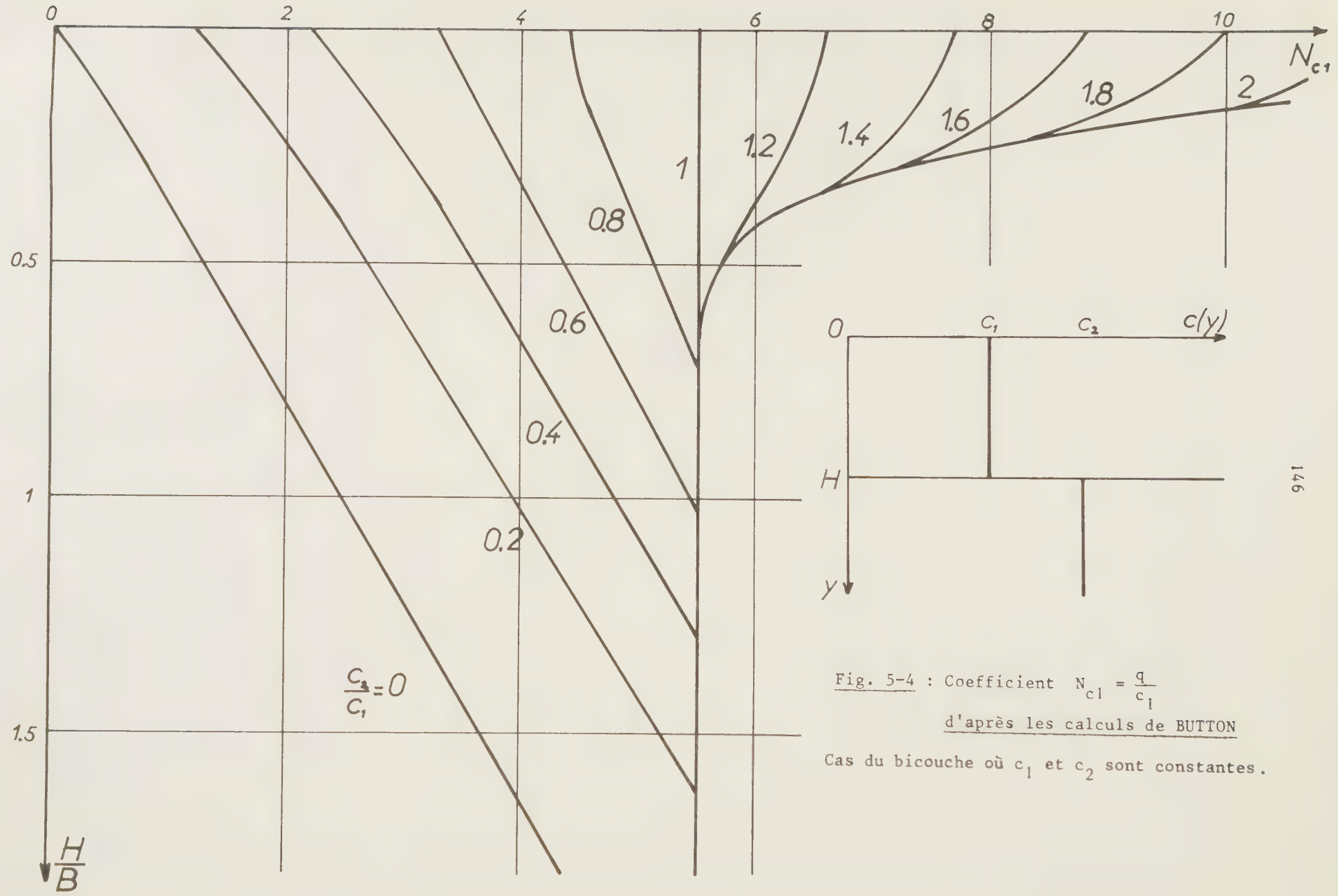


Fig. 5-4 : Coefficient $N_{c1} = \frac{q}{c_1}$

d'après les calculs de BUTTON

Cas du bicouche où c_1 et c_2 sont constantes.

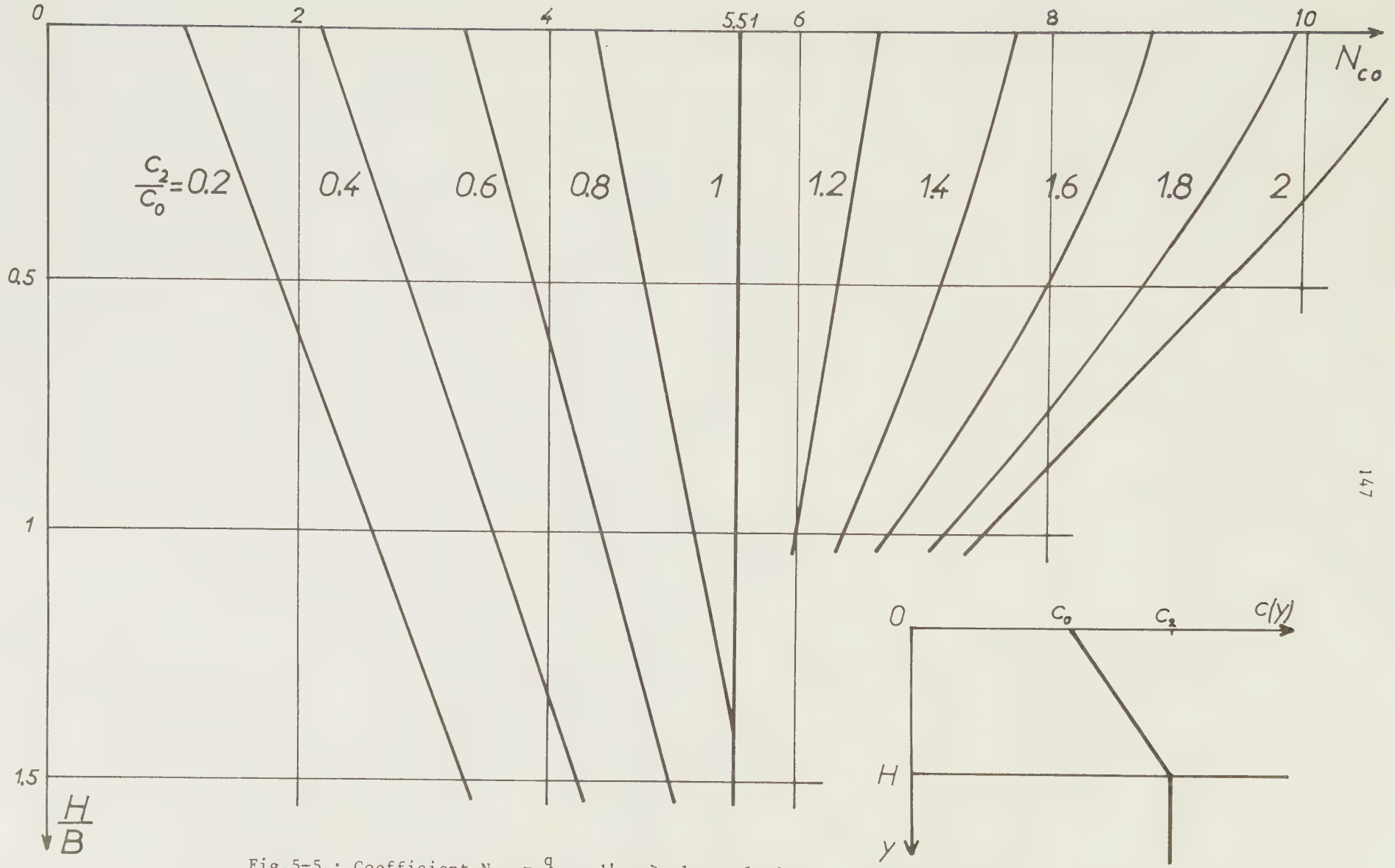


Fig.5-5 : Coefficient $N_{co} = \frac{q}{c_o}$, d'après les calculs de BUTTON. Cas du bicouche où c_1 varie linéairement avec la profondeur et où c_2 est constante.

Rappel : En milieu purement cohérent, l'annulation de la résultante générale des forces appliquées au segment de cercle ne modifie pas les résultats.

5.4.1.4. Résultats

Ils sont présentés dans 2 abaques (Figures 5-4 et 5-5) donnant N_{c1} ou N_{co} en fonction de $\frac{H}{B}$ et de $\frac{c_2}{c_1}$.

BUTTON propose, en outre, d'utiliser les coefficients de SKEMPTON [93] pour généraliser ses résultats aux fondations profondes et aux fondations rectangulaires.

5.4.1.5. Remarques personnelles

Nous avons employé la méthode de calcul proposée par BUTTON au Chapitre 2, en la généralisant au cas d'un sol pouvant présenter un frottement interne. Nous avons donc déjà analysé longuement les fondements et les implications d'un tel calcul. Le lecteur pourra trouver de légères différences entre nos résultats (Abaque n°1 de l'Annexe II) et ceux de BUTTON (Figure 5-4). Cela est sans doute dû à ce que la recherche du cercle donnant la valeur minimale de la force portante a été menée manuellement par BUTTON, alors que nous avons utilisé l'ordinateur.

5.4.2. Travaux de JAMES, KRIZEK et BAKER [39]

5.4.2.1. Généralités

Ces auteurs proposent de généraliser le calcul de BUTTON à un sol purement cohérent et dont la cohésion varie avec la profondeur selon la distribution de la figure 5-6. Ce cas est particulièrement intéressant car il est relativement fréquent de rencontrer des argiles normalement consolidées et présentant une surconsolidation de surface due à la sécheresse.

5.4.2.2. Hypothèses

- Sol purement cohérent : $\phi = 0°$

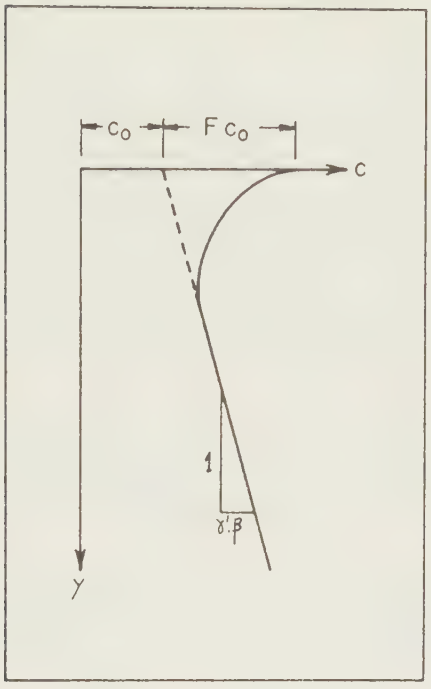


Fig. 5-6 : Distribution de la cohésion en fonction de la profondeur, pour JAMES, KRIZEK et BAKER.

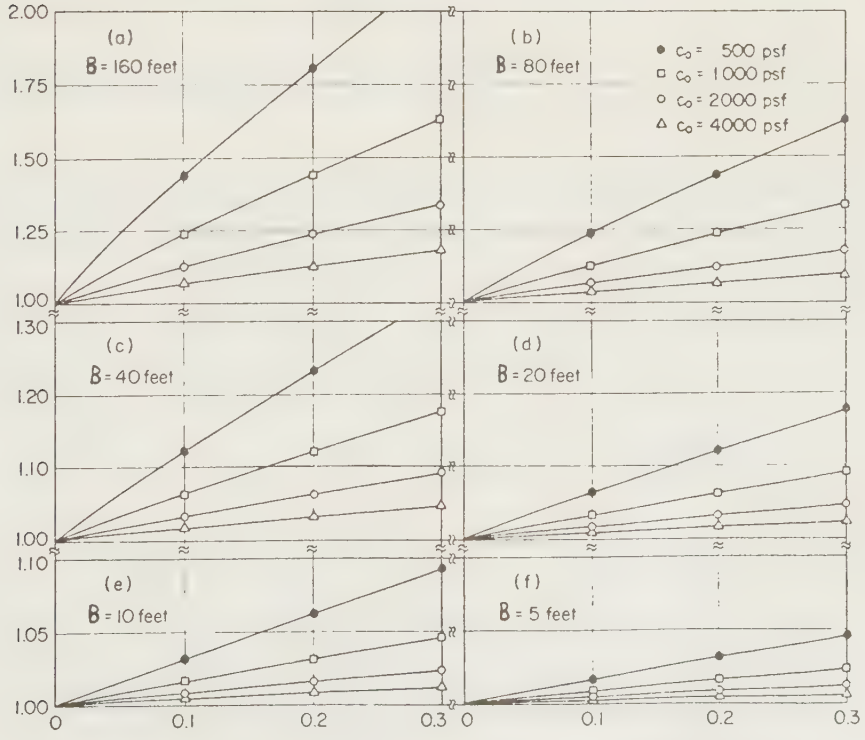


Fig. 5-7 : Résultats des calculs de JAMES, KRIZEK et BAKER pour F = 0.

$\frac{N_{co}}{5.52}$ (en ordonnées) en fonction de β (en abscisses), pour différentes valeurs de B et c_o.

- Cohésion $c(y) = c_o + \beta . \gamma' . y + F . c_o . e^{-\frac{2y}{\alpha . B}}$

où α, β, et F sont des coefficients adimensionnels empiriques déterminés à partir de la courbe de la figure 5-6, supposée connue expérimentalement, ou encore selon des valeurs proposées par différents auteurs.

- Cercle de glissement passant par le bord de la fondation.

- Charge centrée.

5.4.2.3. Déroulement des calculs

Ceux-ci sont tout à fait identiques à ceux de BUTTON, à la différence près que l'emploi de l'ordinateur a permis d'employer une distribution plus élaborée de la cohésion avec la profondeur.

5.4.2.4. Résultats

a) En supposant F = 0 (pas de surconsolidation de surface) une série d'abaques (figure 5-7) présente le rapport $\frac{N_{co}}{5.52}$, connaissant B, β et c_o.

b) Si F ≠ 0, la pression portante est évaluée, d'une manière approchée, à : $q \simeq c_o . N_{co} . (1 + 0.2 \alpha . F)$.

Les surconsolidations observées "in situ" impliquent des valeurs de α allant de 0.025 à 0.4 et de F allant de 0 à 4. La surconsolidation de surface modifie donc peu la pression portante limite du sol.

Quant à β, les auteurs pensent qu'il peut varier de 0 à 0.3.

5.4.2.5. Remarques personnelles

Les auteurs ne fournissent pas la valeur de γ' avec laquelle ils ont effectué leurs calculs. Certes, ils n'ont pas voulu introduire un nouveau paramètre, mais en réalité, il est possible de prendre en compte différentes valeurs de γ', tout en simplifiant la présentation des résultats. Il suffit d'opérer en paramètres adimensionnels : la distribution de la cohésion, en fonction de la profondeur, peut s'écrire :

$$\frac{c(z)}{\gamma'.B} = \frac{c_o}{\gamma'.B} + \beta \cdot \frac{y}{B} + F \cdot \frac{c_o}{\gamma'.B} \cdot e^{-\frac{2y}{\alpha.B}}$$

Pour F = 0, les résultats de la figure 5-7 auraient pu être présentés dans un seul abaque, donnant les valeurs de N_{co}, en fonction de celles de β et $\frac{\gamma' B}{c_o}$.

On observe que N_{co} augmente avec B et diminue avec c_o. On peut en déduire que N_{co} augmente avec $\frac{\gamma' B}{c_o}$.

On vérifie d'ailleurs que les courbes de la figure 5-7 correspondant à une même valeur de $\frac{\gamma' B}{c_o}$ se superposent exactement.

Exemples : B = 160 ft. , c_o = 4000 psf.

et B = 40 ft. , c_o = 1000 psf.

ou encore : B = 40 ft., c_o = 4000 psf .

et B = 5 ft., c_o = 500 psf .

5.4.3. Travaux de CARIOU et CAZENAVE [14]

Nous ne reviendrons pas sur les calculs de ces auteurs, dont nous avons déjà analysé la méthode au paragraphe 3.6.2. Leurs résultats sont présentés sous forme de plusieurs abaques donnant q en fonction de c_1, c_2 et $\frac{H}{B}$. Tous ces abaques se superposent en un seul (figure 5-8) en prenant les valeurs de $\frac{q}{c_1} = N_{c1}$ en fonction de $\frac{H}{B}$ et de $\frac{c2}{c_1}$.

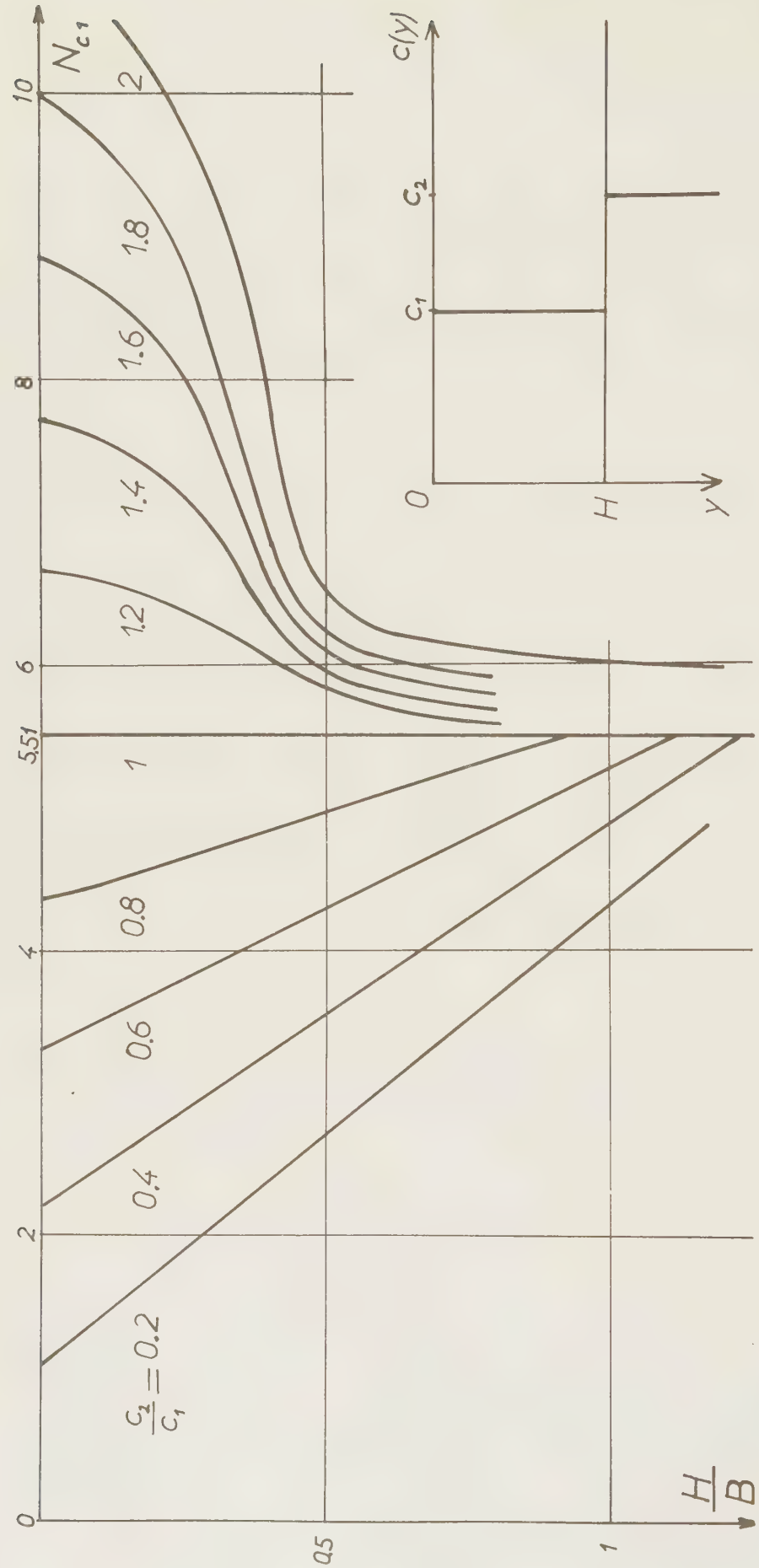


Fig. 5-8 : Résultats des calculs de CARIOU et CAZENAVE : Coefficient $N_{c1} = \frac{q}{c_1}$, dans le cas du bicouche où c_1 et c_2 sont des constantes.

5.5 TRAVAUX UTILISANT LA THEORIE DU CORPS RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE NON HOMOGENE

En dépit du fait que plusieurs auteurs étrangers aient contribué à l'élaboration de la théorie ou l'aient utilisée, c'est à l'Ecole Polonaise de plasticité que nous devons la majeure partie des travaux qui font l'objet de ce paragraphe.

5.5.1. Théorie du corps non-homogène en plasticité parfaite

Les études fondamentales sont l'oeuvre de KUZNETZOV [48], SPENCER [99], OLSZAK, RYCHLEWSKI et URBANOWSKI [73], et SOBOTKA [95].

(L'étude la plus complète de ce problème est sans doute l'avant-dernière référence ci-dessus).

Bien que d'autres questions soient abordées dans ces publications (en particulier les problèmes de torsion), nous n'étudierons ici que le problème de la déformation plane. La cohésion du matériau, sans forces de volume (non pesant) et purement cohérent, est une fonction spatiale c(x,y), continue ainsi que ses dérivées premières.

5.5.1.1. Equations générales

En déformation plane, on sait que le critère de TRESCA (ainsi que celui de VON-MISES) et l'hypothèse du matériau standard conduisent à :

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} \qquad \text{et} \quad \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Les équations de l'équilibre s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}1)$$

Le critère d'écoulement devient :

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}^2 = c^2(x,y) \qquad (5\text{-}2)$$

Les vitesses de déformations sont telles que : $\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0 \\ \dfrac{\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y} = \dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \end{cases}$

Du critère, on déduit :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - c(x,y).\sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma + c(x,y).\sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= c(x,y).\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3)$$

où σ est la pression moyenne,
et θ l'angle entre l'axe des x et la première famille de bicaractéristiques (que nous appellerons α , l'autre étant β).

En portant le système (5-3) dans les équations (5-1), il vient le système (5-4) :

$$(5\text{-}4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial x} - 2c\left(\cos 2\theta . \dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \sin 2\theta . \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial c}{\partial x}.\sin 2\theta + \dfrac{\partial c}{\partial y}.\cos 2\theta = 0 \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x} - 2c\left(-\sin 2\theta . \dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \cos 2\theta . \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial c}{\partial x}.\cos 2\theta + \dfrac{\partial c}{\partial y}.\sin 2\theta = 0 \end{cases}$$

Ce système non-linéaire est hyperbolique. Il ne peut être réduit par changement de variables en un système linéaire, comme l'a fait SOKOLOVSKY [97] dans le cas où c est une constante.

Le système caractéristique correspondant peut s'écrire :

$$(5\text{-}5) \qquad \begin{cases} d\sigma - 2c.\, d\theta - \dfrac{\partial c}{\partial x}.\, dy + \dfrac{\partial c}{\partial y}.\, dx = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

le long de la famille α.

$$(5\text{-}6) \qquad \begin{cases} d\sigma + 2c.\, d\theta + \dfrac{\partial c}{\partial x}.dy - \dfrac{\partial c}{\partial y}.\, dx = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\theta \end{cases}$$

le long de la famille β .

Ces deux systèmes peuvent être utilisés pour résoudre un problème par la méthode aux différences finies dite "méthode des caractéristiques" (voir KRAVTCHENKO [46]).

Si on peut déterminer le champ des contraintes, le champ cinématique est alors fourni par :

$$(5\text{-}7) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right).(\sigma_x - \sigma_y) = 2\tau_{xy}.\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \end{cases}$$

système identique à celui obtenu en milieu homogène.

Il est évident que la théorie des charges limites (voir § 4.6.1) s'applique encore ici et que si l'on ne peut compléter le champ statique dans les zones rigides, on obtiendra un majorant de la charge limite.

Si les équations précédentes ont été obtenues en premier par KUZNETSOV [48] , c'est à SPENCER [99] que l'on doit les équations dérivées dans les coordonnées curvilignes des deux familles orthogonales de bicaractéristiques :

$$(5\text{-}8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha} - 2c.\frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial s_\beta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_\beta} + 2c.\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial c}{\partial s_\alpha} = 0 \end{cases}$$

Le système (5-8) se réduit au système des équations de HENCKY pour c = constante. On peut remarquer que les équations donnant les vitesses sont les mêmes que celles obtenues en milieu homogène par GEIRINGER, puisque c n'intervient pas :

$$(5\text{-}9) \qquad \begin{cases} dv_\alpha - v_\beta . d\theta = 0 \\ dv_\beta + v_\alpha . d\theta = 0 \end{cases}$$

Cherchons maintenant les manières de résoudre ces équations, en nous

attachant plus particulièrement à des fonctions du type c(y).

5.5.1.2. Solutions explicites

a) Une première solution explicite est proposée par KUZNETSOV et reprise par OLSZAK et co-auteurs. Elle concerne un matériau dont la cohésion varie avec la profondeur de manière monotone : c = c(y). Sur la surface horizontale (y = 0), on $\sigma_y = -p$, $\tau_{xy} = t$ (p et t étant des constantes, $|t| < c(0)$.

Le tenseur-contrainte dans le massif est donné par :

$$\sigma_y = -p$$

$$\tau_{xy} = t$$

$$\sigma_x = -p \pm 2\sqrt{c^2 - t^2}$$

Les équations des bicaractéristiques sont :

$$x \pm \varepsilon \cdot \int_0^y \left(\frac{c - t}{c + t}\right)^{\pm \frac{1}{2}} \cdot dy = \text{constante}$$

avec ε = signe de $(\sigma_x - \sigma_y)$

On remarque que si t = 0, les bicaractéristiques sont deux familles de droites inclinées de $\pm \frac{\pi}{4}$.

b) Une deuxième solution analytique est fournie par OLSZAK et co-auteurs dans le cas d'une plaque comprimée entre deux charges de longueur infinie, la cohésion étant une fonction c = c(y) comme précédemment.

c) Remarque : Si c(y) est une fonction décroissante, il n'est pas évident que la condition $|t| < c(o)$ soit suffisante pour que le critère ne soit pas violé dans le massif.

5.5.1.3. Solutions approchées

Le système (5-4) étant non-linéaire, KUZNETSOV, SPENCER, ainsi que OLSZAK et ses co-auteurs se sont attachés à trouver des solutions approchées, en particulier dans le cas où le matériau présente une faible non-homogénéité:

$$c(x,y) = c_o + \varepsilon.c'(x,y)$$

où $\varepsilon.c'$ est petit devant c.

Le cas particulier où c et c' sont des fonctions de y seulement,et où la surface du massif est soumise à l'action d'un poinçon rigide et lisse est étudié de façons différentes par KUZNETSOV et par SPENCER.

La solution proposée par KUZNETSOV, qui emploie une fonction de contraintes, ne semble pas satisfaisante car elle présente une ligne de discontinuité pour les contraintes et pour les vitesses (fig. 5-9-a).

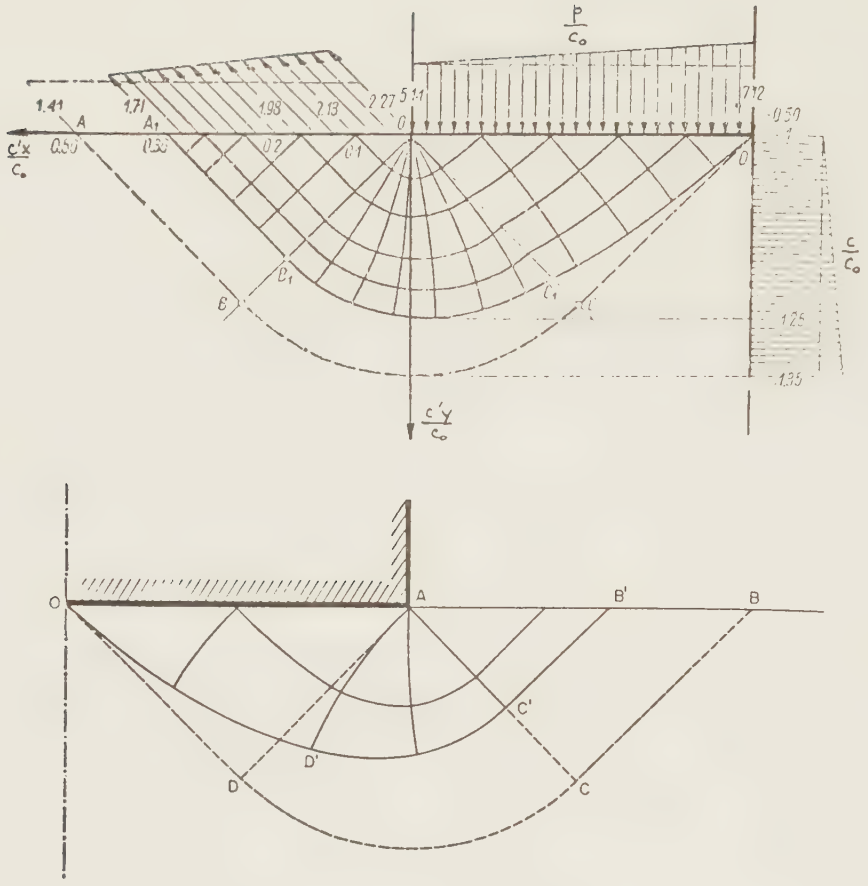
En revanche SPENCER propose du même problème une solution sans discontinuité (fig.5-9-b), par la méthode de perturbation , méthode employée indépendamment par DRUYANOV [23] . La méthode de perturbation consiste à résoudre les systèmes (5-8) et (5-9) en y portant des solutions de la forme :

$$(5\text{-}10)\quad \begin{cases} \sigma = \sigma_o + \varepsilon.\sigma' + \varepsilon^2.\sigma'' + \dots \\ \theta = \theta_o + \varepsilon.\theta' + \varepsilon^2.\theta'' + \dots \\ V_\alpha = V_{\alpha o} + \varepsilon.V'_\alpha + \varepsilon^2.V''_\alpha + \dots \\ V_\beta = V_{\beta o} + \varepsilon.V'_\beta + \varepsilon^2.V''_\beta + \dots \end{cases}$$

En annulant les termes indépendants de ε dans les systèmes (5-8) et (5-9) ainsi complétés, on obtient une solution dite initiale, qui n'est autre que celle concernant le milieu homogène avec $c = c_o$: σ_o, θ_o , $V_{\alpha o}$ et $V_{\beta o}$. En annulant les coefficients des termes en ε on obtient les équations de perturbation du premier ordre dont la résolution fournit σ', θ' , v'_α et v'_β . On peut également, en annulant les coefficients de ε^2 avoir une solution approchée du second ordre,et ainsi de suite.

5.5.1.4. Méthodes inverse et semi-inverse

Ces méthodes sont fondées sur le fait que n'importe quel champ de contraintes admissible peut être considéré comme la solution correspondant à une certaine fonction c(x,y). On peut donc ainsi se donner a priori le tenseur-contrainte, mais on peut aussi ne se donner que certaines de ses propriétés.



a) schéma de KUZNETSOV

b) schéma de SPENCER

Fig. 5-9 : Cas d'une petite non-homogénéité de cohésion : $c = c_o + \varepsilon . c'(y)$, avec $c'(y) = 0.7 \sqrt{2} \cdot c_o \cdot \frac{y}{B}$

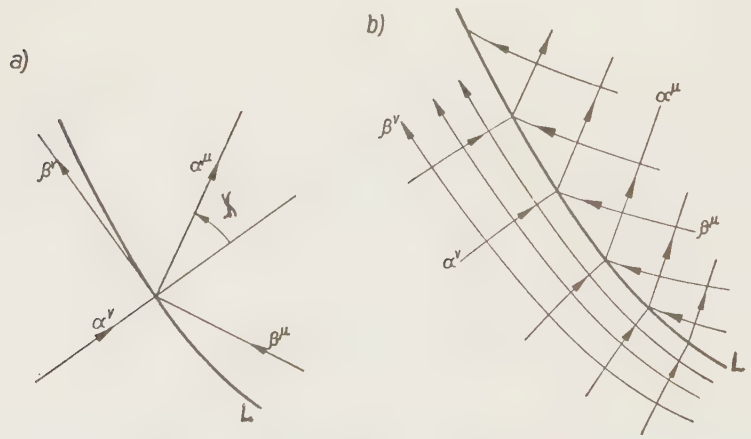


Fig. 5-10 : Rotation des bicaractéristiques du champ statique au passage d'une ligne de discontinuité de la cohésion, d'après RYCHLEWSKI.

Il est évident alors que c(x,y) doit être donné qu'à certaines indéterminations près. Nous n'étudierons pas plus longuement ces méthodes, qui n'ont pas reçu jusqu'à présent, du moins à notre connaissance, d'applications pour le problème du poinçonnement d'un matériau présentant une cohésion c(y).

5.5.1.5. Remarque sur les travaux de SOBOTKA

Les équations posées par SOBOTKA [95] sont originales car cet auteur admet l'existence de forces de volume :

$$(5\text{-}11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = Y \end{cases}$$

D'autre part, SOBOTKA ne se borne pas à étudier le cas où le critère est celui de TRESCA, mais introduit également le critère de COULOMB.

Etudions maintenant quelques applications de la théorie

5.5.2. Cas où la non-homogénéité est faible

On a vu que la théorie permettait de résoudre ce type de problème de manière approchée. C'est ce qu'on fait RYCHLEWSKI et OSTROWSKA [81] avec des cohésions :

$$c(x,y) = c_o + \varepsilon.c'(x,y)$$

dans un massif semi-infini soumis à l'action d'un poinçon rigide.

Le terme $\varepsilon.c'(x,y)$ peut prendre l'une des formes suivantes :

$$ax + by \quad ; \quad b\,(y-c)^2 \quad ; \quad a(x-d)^2 \; ;$$

$$a(x-d)^2 + b(y-c)^2 \; ; \quad -g(3y^3 + 4y^2).$$

Les auteurs se sont particulièrement attachés à calculer la répartition des contraintes sous le poinçon.

5.5.3. Cas de la non-homogénéité transversale $c = c(x)$

Ce problème est l'objet d'une étude de KOWALSCZYK [45].

La cohésion dans un massif semi-infini soumis à l'action d'un poinçon rigide est de la forme :

$$c(x) = c_o . e^{-\frac{\lambda}{B} \cdot x}$$

L'auteur calcule la répartition des contraintes sous le poinçon en employant la méthode numérique aux différences finies.

5.5.4. Cas d'une discontinuité de la cohésion : $c(x,y)$ discontinue

Ce problème nous intéresse au premier chef, puisqu'il contient le cas du sol bicouche.

5.5.4.1. Travaux de RYCHLEWSKI

RYCHLEWSKI [79] et [80] , a étudié un matériau comportant deux régions séparées par une ligne L sur laquelle la cohésion présente une discontinuité. Soient c_ν et c_μ les valeurs de la fonction c dans chacune des 2 régions limitées par L.

A l'interface $c = \inf. (c_\mu , c_\nu)$.

Le système (5-3) et les équations de l'équilibre permettent de fournir les relations entre σ_μ , σ_ν , θ_μ et θ_ν :

$$(5\text{-}12) \quad \begin{cases} \sigma_\mu - \sigma_\nu = - c_\nu . \sin 2(\theta_\nu - \varphi) + \sqrt{c_\mu^2 - c_\nu^2 . \cos^2 2(\theta_\nu - \varphi)} \\ \theta_\mu = \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{Arcos} \left[\frac{c_\nu}{c_\mu} . \cos 2(\theta_\nu - \varphi) \right] \quad (\text{modulo } \pi) \end{cases}$$

où φ est l'angle que fait l'axe des x avec la normale à L.

La seconde équation du système précédent constitue une loi de la "réfraction" des bicaractéristiques à travers L.

En particulier, si par exemple $c_\mu > c_\vartheta$, il existe une incidence limite dans le milieu c_μ quand la bicaractéristique correspondante du milieu c_ϑ est tangente à L :

$$\chi = \frac{1}{2} \text{ Arcos } (\frac{c_\vartheta}{c_\mu}) \, . \qquad \text{(voir figure 5-10)}$$

Le système (5-12) a permi à RYCHLEWSKI [80] de résoudre numériquement le problème du poinçonnement d'un milieu semi-infini comportant deux régions, où les cohésions c_μ et c_ϑ sont constantes , séparées par une ligne L passant par un bord du poinçon. Ce cas ne peut recevoir d'application en Mécanique des Sols.

5.5.4.2. Travaux de SALENÇON [86]

Cet auteur, dont nous avons déjà, par ailleurs, analysé les travaux (chapitre 4), a particulièrement étudié le cas du sol bicouche avec $c_1 \leq c_2$.

On remarque que pour c_2 suffisamment grand ($c_2 > K$) la zone plastique ne s'étend que dans la couche supérieure.

La solution proposée par SALENÇON pour le cas d'une couche de sol d'épaisseur limitée reposant sur une assise rigide est encore une solution exacte de ce nouveau problème ; à condition, bien entendu, de pouvoir prolonger le champ statique dans la couche inférieure. Sinon, la solution cinématique ne fournit qu'un majorant de la charge limite, ou encore un minorant de K, soit K'.

Sur la figure 5-11, on présente les valeurs de $\frac{K'}{c_1}$ en fonction de $\frac{H}{B}$ pour un poinçon lisse.

Remarque : Dans le cas où $c_1 \geq c_2$, SALENÇON propose un majorant q' de la charge limite q :

$$q' = (\pi + 2) \, . \, c_1 - c_1 . (1 - \frac{c_2}{c_1}) \, . \, F \, (\frac{H}{B})$$

où $F \, (\frac{H}{B})$ est une fonction donnée par la figure 5-12. Mais l'auteur précise aussitôt que la théorie des charges limites ne permet sans doute pas de résoudre ce problème convenablement : les essais de TCHENG [106] ont montré que la rupture se produit sans qu'il y ait écoulement plastique libre.

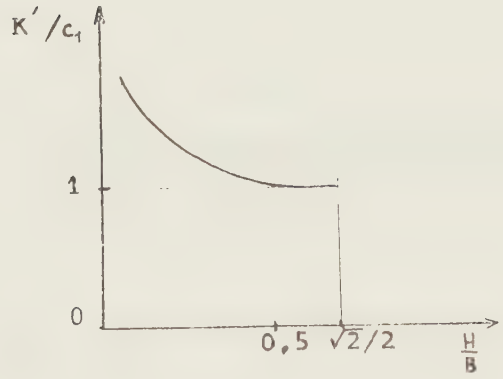


Fig. 5-11 : valeurs de K', minorant de K, d'après SALENÇON

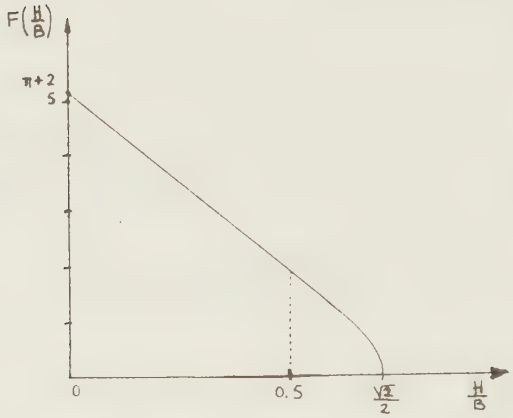


Fig. 5-12 : Fonction F permettant de calculer un majorant q' de q, d'après SALENÇON

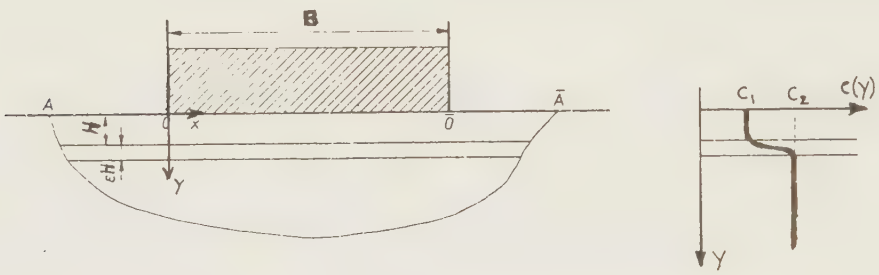


Fig. 5-13 : Distribution de la cohésion en fonction de la profondeur pour OSTROWSKA.

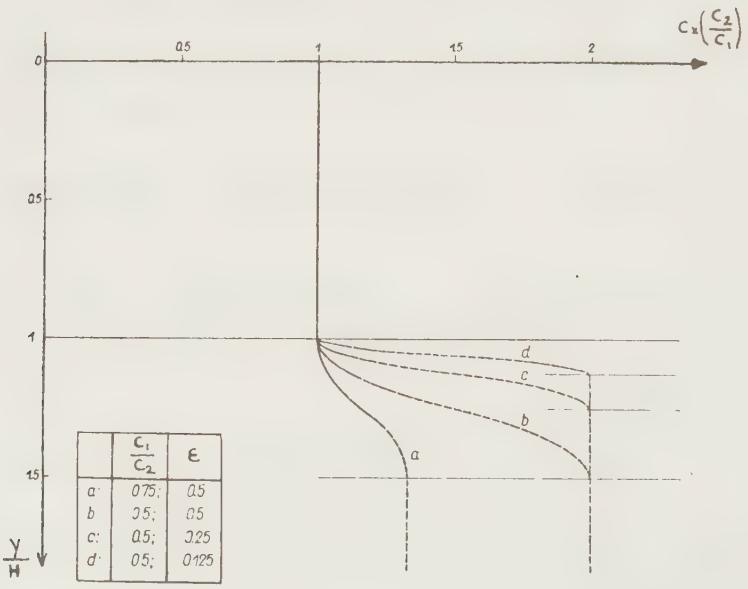


Fig. 5-14 : Exemples de distributions de la cohésion c(y), suivant différentes valeurs de paramètres $\frac{c1}{c_2}$ et ε , d'après OSTROWSKA

5.5.5. Cas où la cohésion ne varie qu'en fonction de la profondeur : c = c(y)

Nous avons déjà vu au paragraphe 5.5.1 plusieurs exemples d'étude de ce problème, en particulier dans KUZNETSOV [48], SPENCER [99], RYCHLEWSKI et OSTROWSKA [81].

FAVRETTI [24] propose une solution des équations (5-5) et (5-6) par la méthode des caractéristiques, avec une cohésion $c(y) = c_o - c'\frac{y}{B}$ qui diminue avec la profondeur. Ce cas est important en métallurgie (cémentation suivie d'une trempe superficielle), mais ne correspond à aucune réalité en Mécanique des Sols.

SALENÇON [86], étudie également ce problème du matériau stratifié horizontalement, et applique ses résultats théoriques au cas où $c(y) = c_o + c'.\frac{y}{B}$

Un minorant de la pression portante limite est : $(2 + \pi).\ c_o$

SALENÇON propose un majorant q' de q :

$$q' = c_o.(\pi + 2 + m') + c'\ (1 + \frac{m'^2 . c_o^2}{4c'^2}) - \frac{m'^2\ c_o^2}{2c'}$$

pour $m'c_o \leqslant 2c'$ et :

$$q' = c_o.(\pi + 2) + 2c'$$

pour $m'c_o \geqslant 2c'$

Remarque : Pour le poinçon lisse (m' = 0), l'auteur retrouve exactement pour q' les valeurs données par KUZNETSOV [48] et par SPENCER [99] par des méthodes cinématiques approchées, dans l'étude décrite au paragraphe 5.5.1.3 et sur la figure 5.9.

5.5.6. Travaux de OSTROWSKA

5.5.6.1. Hypothèses

L'auteur analyse dans une communication [74] le cas d'une fondation rigide et lisse reposant sur un sol bicouche purement cohérent constitué d'une

couche de sol meuble reposant sur une assise plus dure. ($c_1 < c_2$).

On a vu que l'établissement des équations (5-4), (5-5) et (5-6) supposait continues la fonction c(x,y) et ses dérivées premières.

Pour pouvoir utiliser ces équations à la résolution du problème du sol bicouche , OSTROWSKA propose la distribution de la fonction c(x,y) = c(y) de la figure (5-13) : la cohésion a des valeurs c_1 et c_2 constantes dans les deux couches et varie brutalement de c_1 à c_2 dans une couche intermédiaire mince d'épaisseur ε H.

5.5.6.2. Déroulement des calculs

La cohésion est donnée par la fonction :

$$c(y) = \begin{cases} c_1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant H \\ c_1 + 2\,(c_2 - c_1).\dfrac{(y + H)^2}{\varepsilon^2.H^2} & \text{pour} \quad H \leqslant y \leqslant H + \dfrac{\varepsilon.H}{2} \\ c_2 - 2\,(c_2 - c_1)\,\dfrac{(y + H + \varepsilon.H)^2}{\varepsilon^2.\,H^2} & \text{pour} \quad H + \dfrac{\varepsilon.H}{2} \leqslant y \leqslant H + \varepsilon.H \\ c_2 & \text{pour} \quad y \geqslant H + \varepsilon.H \end{cases}$$

dont la représentation graphique est fournie sur la figure 5-14 pour différentes valeurs de ε et de $\dfrac{c_1}{c_2}$.

On porte cette fonction dans les équations (5-5) et (5-6) en remplaçant les différentielles par des différences finies (Méthode des caractéristiques)

5.5.6.3. Résultats

Après avoir présenté quelques réseaux de bicaractéristiques ayant servi à résoudre le problème (figure 5-15), l'auteur présente dans un abaque les valeurs de N_{c1} en fonction de $\dfrac{H}{B}$, $\dfrac{c_1}{c_2}$ et ε (figure 5-16), ainsi par ailleurs que la répartition des contraintes sous la semelle (figure 5-17).

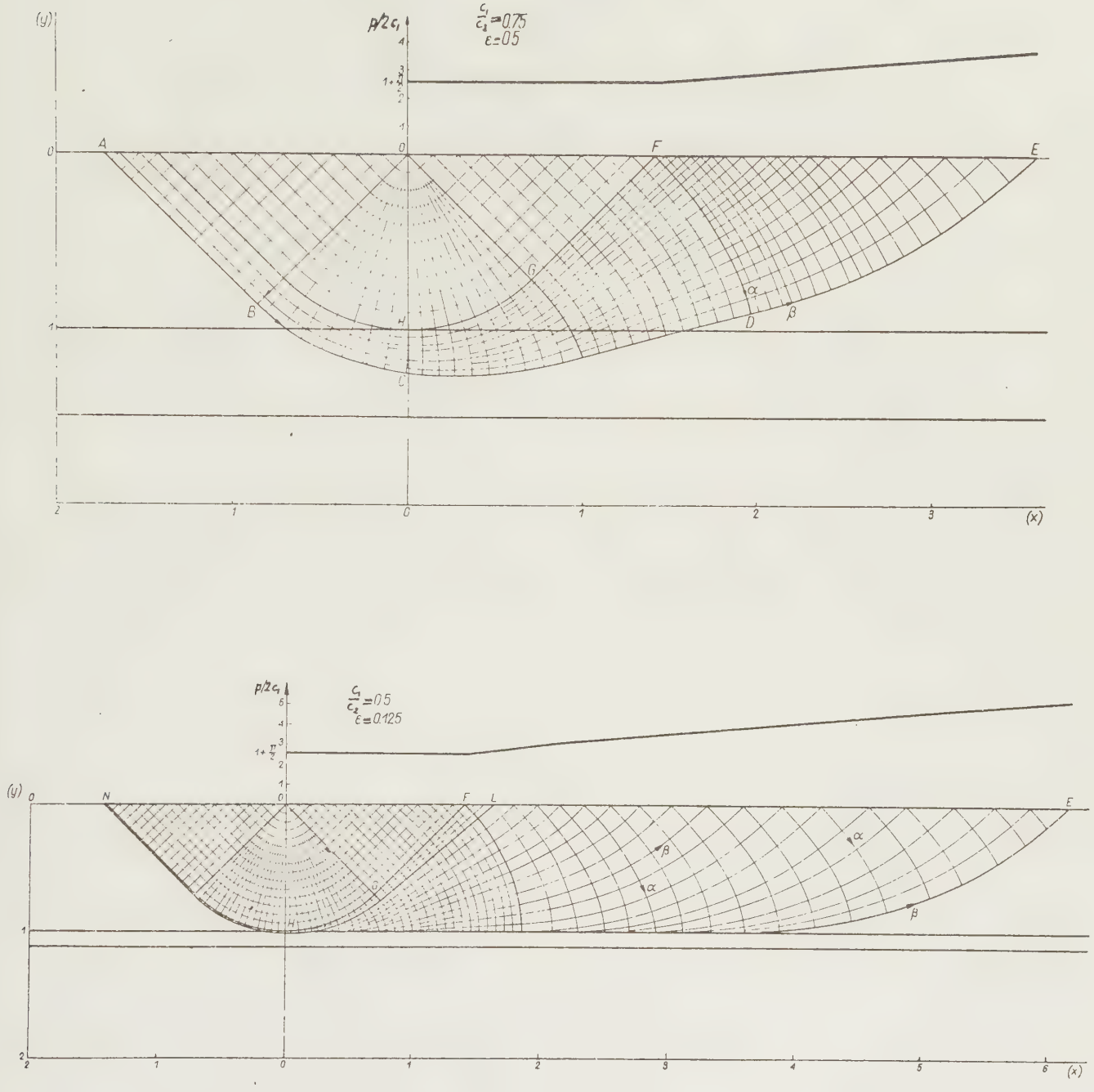


Fig. 5-15 : Exemples de 2 réseaux de bicaractéristiques obtenus par OSTROWSKA.

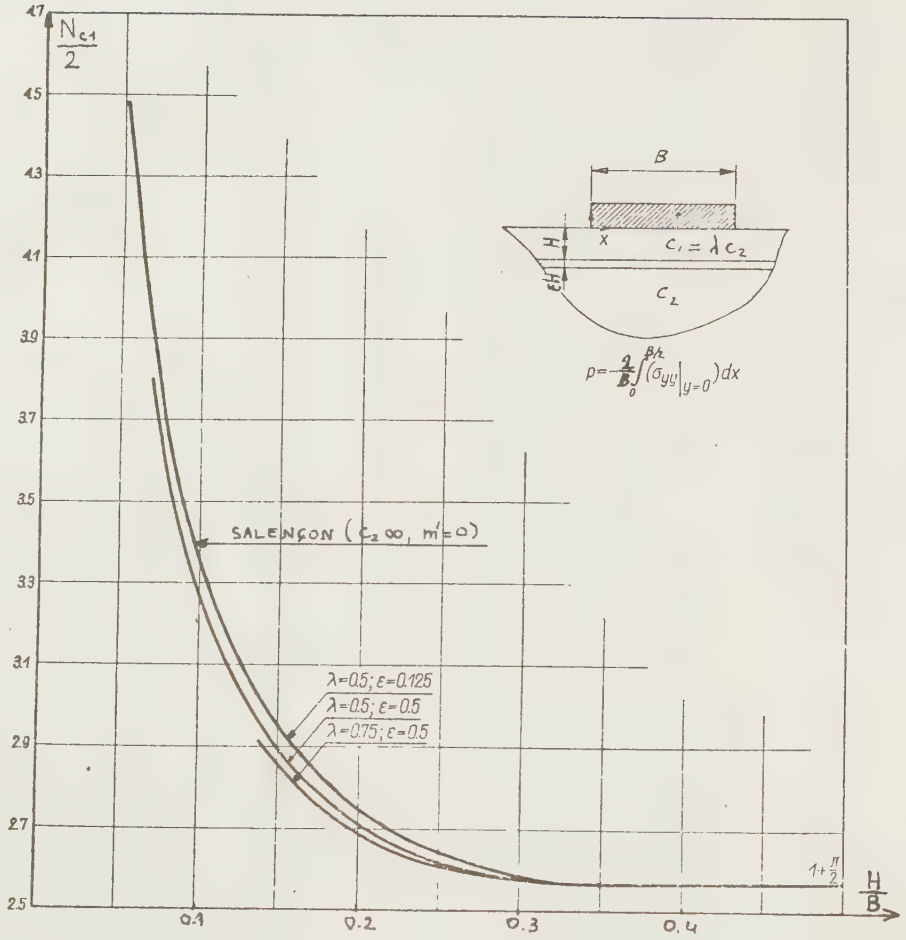


Fig. 5-16 : Valeurs du coefficient N_{c1}, d'après les calculs de OSTROWSKA. Comparaison avec les résultats de SALENÇON.

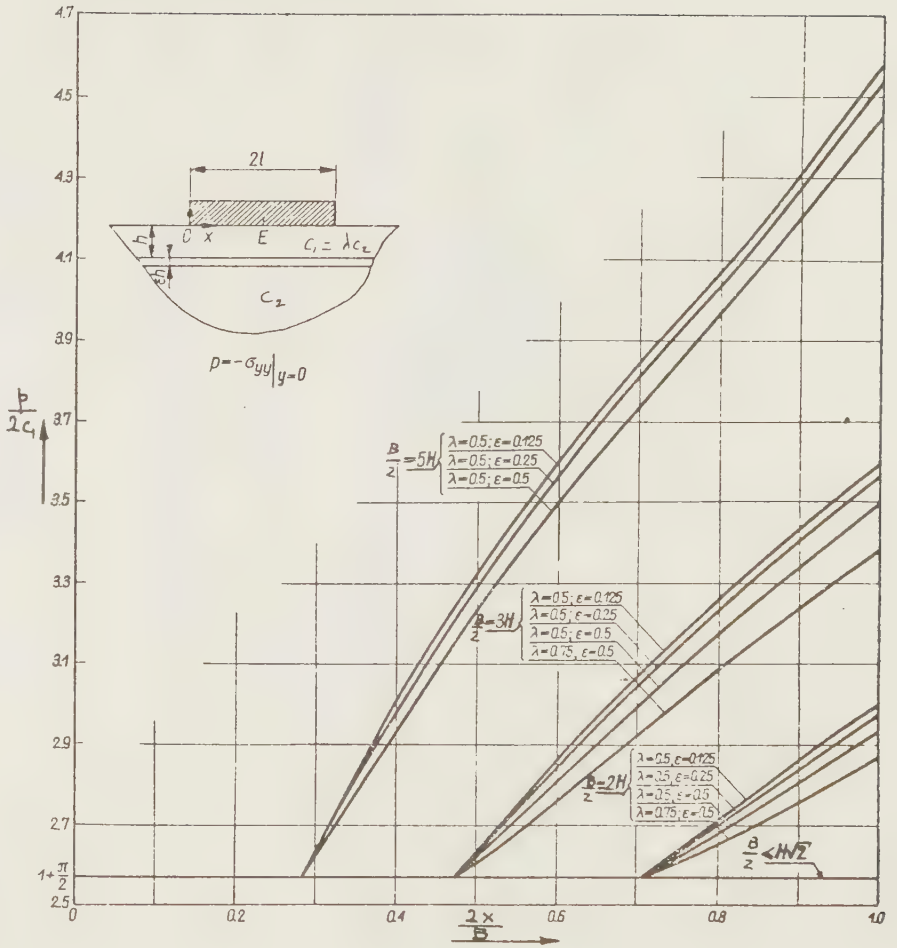


Fig. 5-17 : Valeurs de la contrainte p sous la semelle, d'après les calculs de OSTROWSKA.

5.5.6.4. Remarques personnelles

a) L'auteur s'est borné à fournir des résultats pour $\varepsilon = 0.5$ et $\varepsilon = 0.125$, ce qui ne permet pas de faire sur la figure 5-16 une extrapolation pour obtenir la courbe N_{c1} fonction de $\frac{H}{B}$ pour $\varepsilon = 0$. Néanmoins, on peut penser que celle-ci est proche de la courbe correspondant à $\varepsilon = 0.125$

b) Sur la figure 5-15, pour $\varepsilon = 0.125$, on remarque que la zone plastique ne s'étend que dans la couche supérieure. On devrait donc retrouver les valeurs proposées par SALENÇON [86] dans le cas du milieu purement cohérent (figure 4-16, fondation lisse). On a donc porté ces valeurs sur la figure 5-16. La courbe ainsi obtenue est exactement confondue avec celle d'OSTROWSKA.

c) Les réseaux de bicaractéristiques d'OSTROWSKA se trouvent limités au point F sous la fondation (figures 5-15). Ce point correspond à une limite due à des difficultés rencontrées dans la résolution numérique (intersection de bicaractéristiques β). Cela entraine que le point F représente la position extrême de l'axe de la fondation. N_{c1} étant calculé par intégration des contraintes sous la fondation, on ne peut connaitre ce coefficient pour des valeurs faibles de $\frac{H}{B}$.

5.6 CONCLUSION DU CHAPITRE V

5.6.1. Comparaison des résultats proposés par les différents auteurs

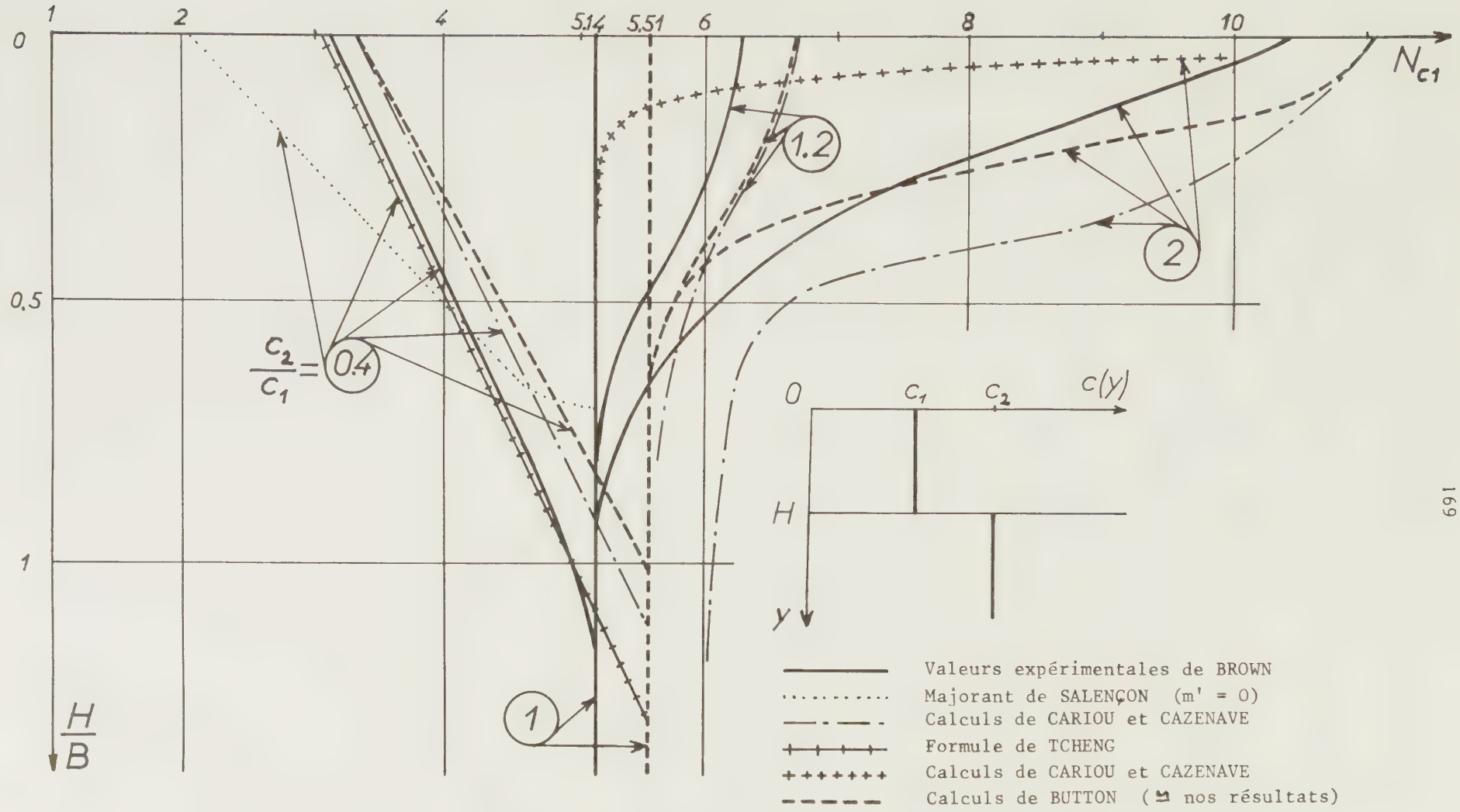
Après avoir analysé les différents travaux théoriques et expérimentaux intéressant le cas d'un sol purement cohérent et non verticalement homogène, il nous a semblé intéressant de rapprocher les divers résultats.

5.6.1.1. Le cas du sol bicouche (cohésion c_1 dans la couche supérieure, c_2 dans la couche inférieure) est celui qui a suscité le plus de travaux. Nous avons ainsi comparé sur la figure 5-18 les résultats expérimentaux du coefficient $N_{c1} = \frac{q}{c_1}$ donnés par BROWN [8] et les valeurs théoriques proposées par BUTTON [10], et par CARIOU et CAZENAVE [14], pour $\frac{c_2}{c_1} = 0.4$, 1 , 1.2 et 2. Nous y avons porté également les valeurs données par la formule semi-empirique de TCHENG [106] et le majorant de SALENÇON [86], pour $\frac{c_2}{c_1} = 0.4$, ainsi que les résultats, pour $\frac{c_2}{c_1} = 2$, des calculs de OSTROWSKA [74] en plasticité parfaite.

Nous pouvons constater, pour $\frac{c_2}{c_1} < 1$, une concordance intéressante entre les résultats expérimentaux et les théories du poinçonnement vertical (TCHENG) et du cercle de glissement (BUTTON, CARIOU - CAZENAVE).

Pour $\frac{c_2}{c_1} > 1$, les résultats de BUTTON sont toujours proches des valeurs expérimentales de BROWN, alors que les résultats de CARIOU et CAZENAVE semblent un peu élevés. Quant aux valeurs de N_{c1} données à partir de la théorie de la plasticité parfaite (OSTROWSKA), on constate qu'elles sont bien plus faibles que celles des essais. Ce résultat est à rapprocher de celui, tout à fait analogue obtenu au paragraphe 4-7 et sur la figure 4-22, pour une couche de sol purement cohérent, d'épaisseur limitée : là encore, nos valeurs étaient proches des valeurs expérimentales, alors que les résultats obtenus en plasticité parfaite (SALENÇON) étaient bien trop faibles.

5.6.1.2. Le cas du sol stratifié horizontalement : $c = c(y)$, a intéressé également beaucoup d'auteurs. Mais trois d'entre eux seulement fournissent des valeurs de $N_{co} = \frac{q}{c_o}$. Malheureusement JAMES et co-auteurs [39] font intervenir γ', le poids volumique immergé, sans signaler la valeur de ce paramètre utilisé dans leurs abaques. Nous n'avons donc pu porter sur la figure 5-19 que les résultats de SALENÇON (§ 5.5.5) pour un poinçon lisse ou parfaitement



691

Fig. 5-18 : Comparaison des valeurs théoriques ou expérimentales de $N_{c1} = \frac{q}{c_1}$ obtenues par différents auteurs. Cas du bicouche où c_1 et c_2 sont des constantes.

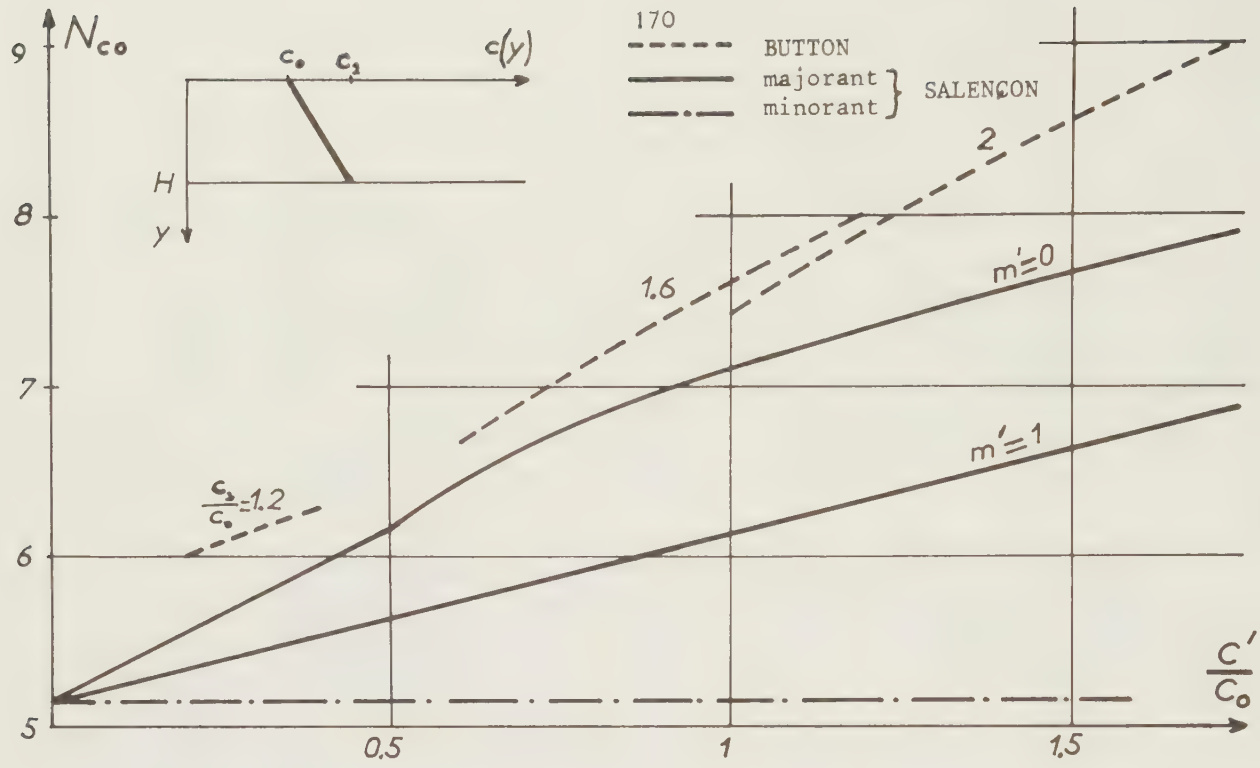


Fig. 5-19 : Comparaison des résultats des calculs de BUTTON et de SALENÇON.
Cas du matériau stratifié : $c(y) = c_o + \frac{c'y}{B} = c_o + (c_2 - c_o)\frac{y}{H}$,
pour $y \leq H$.

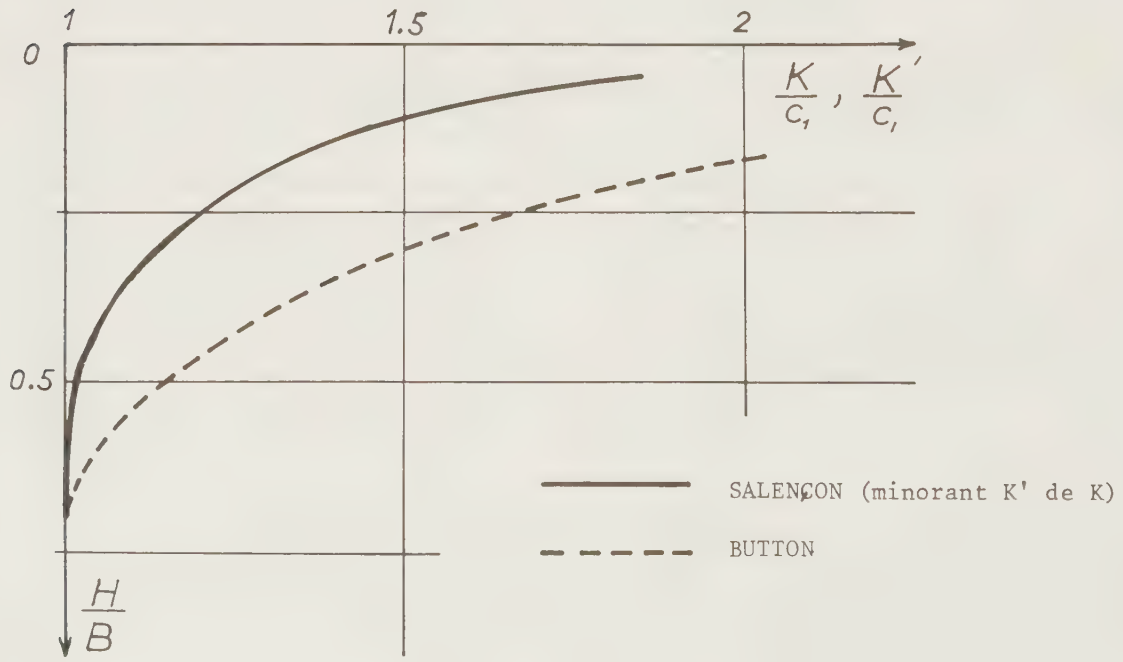


Fig. 5-20 : Valeur K de c_2 à partir de laquelle seule la couche supérieure est concernée par la rupture.

rugueux, et ceux de BUTTON, dans le cas où la cohésion augmente de c_o à c_2 dans la couche supérieure (figure 5-5).

Pour ce dernier auteur, nous avons été obligé de nous limiter à des valeurs de $\frac{H}{B}$ suffisamment grandes pour que le cercle de glissement soit tout entier compris dans la couche supérieure.

A cette condition, on peut comparer la distribution de la cohésion proposée par SALENÇON :

$$c(y) = c_o + c' \cdot \frac{y}{B}$$

et celle proposée par BUTTON :

$$c(y) = c_o + (c_2 - c_o) \frac{y}{H}$$

Il vient alors : $$\frac{c'}{c_o} = (\frac{c_2}{c_o} - 1) \cdot \frac{B}{H}$$

Nous constatons, une nouvelle fois, que les résultats de la théorie de la plasticité parfaite sont bien plus faibles que les valeurs obtenues à partir de cercles de glissement.

5.6.2. Valeur de la cohésion de la couche inférieure à partir de laquelle on peut la considérer comme une assise rigide, ($c_2 = K$).

On a vu que SALENÇON (§ 5.5.4.2) proposait un minorant K' de K (figure 5-11). On peut tracer dans les mêmes axes $(\frac{K}{c_o}, \frac{H}{B})$, une courbe donnant les valeurs de K (figure 5-20), mais déduites cette fois de la théorie du cercle de glissement (figure 5-4, ou abaque n°1 de l'annexe II).

5.6.3. Etude du champ des contraintes au voisinage de la frontière entre deux régions de cohésions constantes c_μ et c_ν.

On a vu (§ 3.5.4) que RYCHLEWSKI [80] a proposé une solution analytique au problème de la variation du tenseur-contrainte au passage d'une ligne de discontinuité de la cohésion. Soit L cette ligne.

Rappelons ici les équations (5-12) auxquelles il a abouti en ce qui concerne les bicaractéristiques α , et prenons $\varphi = 0$, ce qui revient à prendre l'axe des x selon la normale à L (figure 5-21).

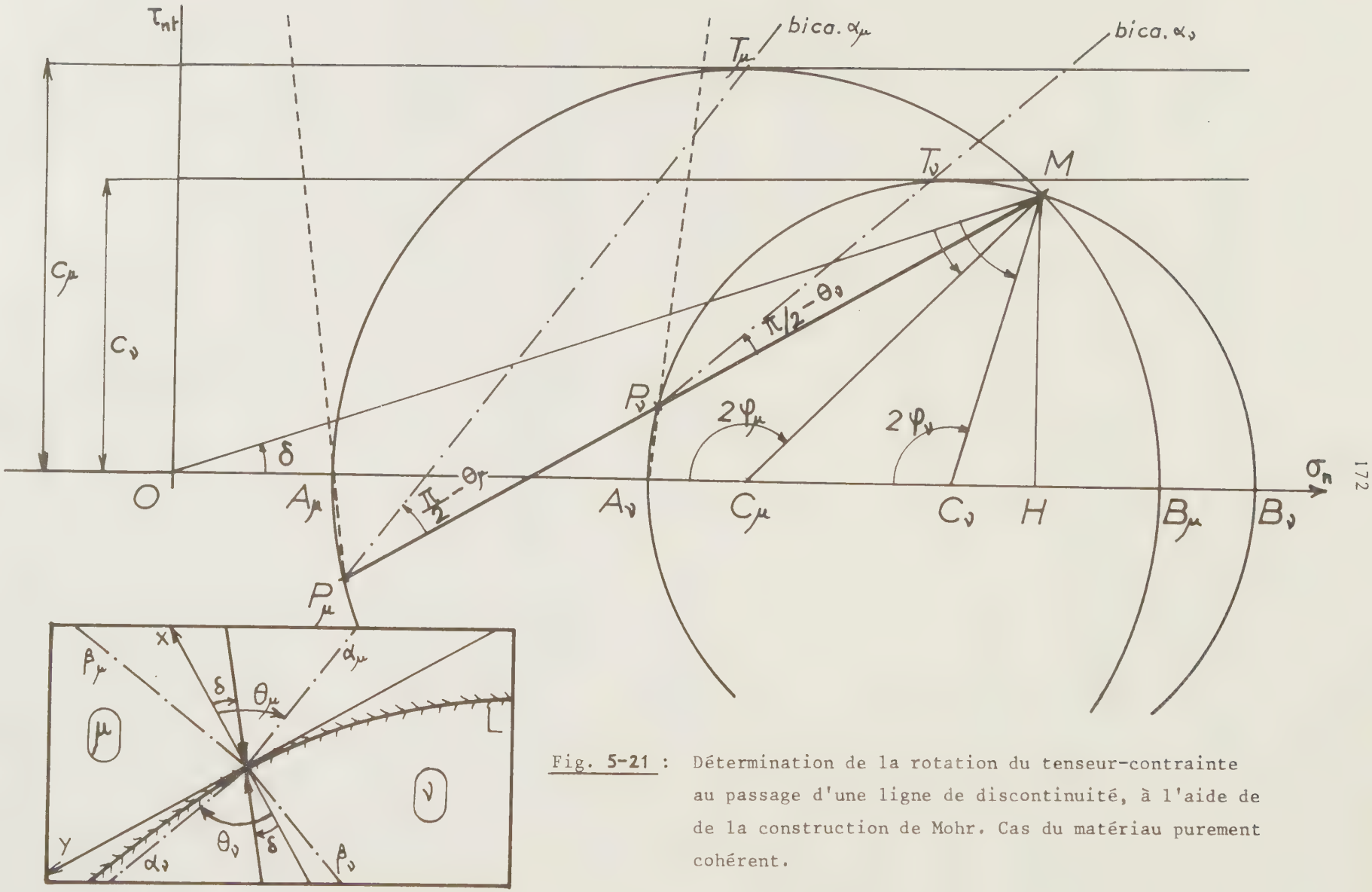


Fig. 5-21 : Détermination de la rotation du tenseur-contrainte au passage d'une ligne de discontinuité, à l'aide de de la construction de Mohr. Cas du matériau purement cohérent.

$$\sigma_\nu - \sigma_\mu = c_\nu . \sin 2\theta_\nu - c_\mu . \sin 2\theta_\mu$$

$$\theta_\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Arcos}\left(\frac{c_\nu}{c_\mu} . \cos 2\theta_\nu \right)$$

Ces relations sont déduites de la condition d'équilibre : en chaque point de L, les contraintes qui s'exercent dans les milieux ν et μ sur une facette tangente à L, sont égales.

Nous proposons alors une solution, fondée sur la même condition, et utilisant la construction de Mohr (figure 5-21). Nous avons choisi de prendre $c_\mu < c_\nu$.

Raisonnons sur les bicaractéristiques α :

Les triangles $C_\mu MH$ et $C_\nu MH$ nous fournissent la relation :

$$\frac{\sin 2\varphi_\nu}{\sin 2\varphi_\mu} = \frac{C_\mu}{C_\nu}$$

Or : $\theta_\mu = \frac{\pi}{4} + \varphi_\mu$ et $\theta_\nu = \frac{\pi}{4} + \varphi_\nu$

D'où : $\cos 2\theta_\mu = \frac{c_\nu}{c_\mu} . \cos 2\theta_\nu$

et $\theta_\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Arcos}\left(\frac{c_\nu}{c_\mu} . \cos 2\theta_\nu \right)$. (modulo π)

qui est la relation de "réfraction" des bicaractéristiques α . On obtiendrait facilement une relation analogue avec les caractéristiques β .

La"réfraction limite" a lieu pour $\theta_\nu = 0$ (modulo $\frac{\pi}{2}$) et l'angle θ_μ correspondant prend la valeur :

$$\theta_\mu = \chi = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Arcos} \left(\frac{c_\nu}{c_\mu} \right)$$

La relation entre les contraintes moyennes dans les milieux μ et ν est tout aussi simple à trouver :

$$\sigma_\nu - \sigma_\mu = \overline{C_\mu C_\nu} \text{ (figure 5-21)}$$

$$= c_\mu . \cos 2\varphi_\mu - c_\nu . \cos 2\varphi_\nu$$

Soit, en fonction de θ_μ et θ_ν :

$$\sigma_\nu - \sigma_\mu = c_\nu . \sin 2\theta_\nu - c_\mu . \sin 2\theta_\mu$$

ou bien, si l'on veut :

$$\sigma_\nu - \sigma_\mu = c_\nu . \sin 2\theta_\nu - \sqrt{c_\mu^2 - c_\nu^2 . \cos^2 2\theta_\nu} \ .$$

Remarque : La construction de Mohr doit permettre de trouver également la rotation du tenseur-contrainte lorsque le milieu est pulvérulent et obéit au critère de COULOMB.

CHAPITRE VI

REMARQUES SUR LA FORCE PORTANTE

D'UN SOL ANISOTROPE

PLAN DU CHAPITRE VI

6.1- Notations du chapitre VI ..... p. 177

6.2- Introduction ..... p. 178

6.3- Travaux de SIVA-REDDY et SRINIVASAN ..... p. 179

6.4- Travaux de DAVIS et CHRISTIAN ..... p. 182

6.1 NOTATIONS du CHAPITRE 6

B : largeur de la fondation.

N_γ, N_c, N_q : coefficients de force portante dans le cas du milieu homogène isotrope.

$\bar{N}_\gamma$, $\bar{N}_c$, $\bar{N}_q$: coefficients de force portante dans le cas d'un milieu anisotrope ou finement stratifié.

$\bar{N}_{co}$: rapport de la pression portante limite à la cohésion mesurée en surface par une compression simple dans le sens vertical, pour un sol purement cohérent anisotrope.

a,b : paramètres caractérisant un matériau purement cohérent dont la cohésion est orthotrope de révolution d'axe vertical.

c : cohésion.

c_1, c_2 : cohésions dans les couches supérieure et inférieure, respectivement.

c_u : cohésion apparente mesurée par un essai de compression simple, non drainé.

c_{uh}, c_{uv}, $c_{u\alpha}$: valeurs de c_u lors d'une compression selon les axes horizontal, vertical, d'inclinaison α, respectivement.

$\bar{c}$: cohésion des fines couches d'un matériau stratifié horizontalement.

q : pression portante limite d'une fondation.

q' : minorant de q.

x, y : directions horizontale et verticale, respectivement.

α : angle d'une direction avec l'horizontale.

ϕ : angle de frottement interne.

$\bar{\phi}$: angle de frottement interne des fines couches d'un matériau stratifié horizontalement.

Ψ : angle entre le plan de rupture et la contrainte principale majeure pour SIVA-REDDY et SRINIVASAN.

σ : pression moyenne.

σ_x, σ_y, τ_{xy} : composantes du tenseur-contrainte.

θ : angle d'une bicaractéristique α avec l'axe des x.

6.2 INTRODUCTION

L'étude de la force portante d'un sol non-homogène ne peut être faite sans aborder le problème des sols anisotropes. En effet, de nombreuses argiles naturelles dont la cohésion augmente avec la profondeur, possèdent, "in-situ", des propriétés mécaniques anisotropes (voir LO et MULLIGAN [60]). Cette anisotropie est généralement une orthotropie d'axe vertical. L'étude de DAVIS et CHRISTIAN [18] montre qu'on a pu observer des valeurs du rapport $\frac{c_{uh}}{c_{uv}}$ allant de 0,73 à 1.56.

Même lors de ses essais d'enfoncement d'une charge rigide dans une argile remaniée, BROWN [8] (voir § 5-3) a pu mesurer une certaine anisotropie de la cohésion c_u, mais dont il n'a pas finalement tenu compte dans ses résultats.

Certains auteurs se sont attachés à résoudre d'une manière théorique le problème de la force portante limite d'une fondation superficielle reposant sur un sol orthotrope de révolution d'axe vertical : SIVA-REDDY et SRINIVASAN [91] et [92] pour un sol purement cohérent, ($\phi = 0$), puis ultérieurement pour un sol d'angle de frottement interne non nul ($\phi \neq 0$), DAVIS et CHRISTIAN [18] pour un sol purement cohérent.

Il nous faut mettre à part les travaux de GIROUD [27], [28], [29] et [30] dont le matériau n'est pas à proprement parler anisotrope, mais plutôt "finement stratifié". Le sol étudié est constitué de fines couches horizontales d'un sol de propriétés $\bar{c}$ et $\bar{\phi}$, alternant avec des couches beaucoup plus épaisses d'un sol caractérisé par c et ϕ, avec $\bar{c} \leqslant c$ et $\bar{\phi} \leqslant \phi$. De plus, les résultats se présentent d'une manière simple si : $c.\cotg \phi = \bar{c}.\cotg \bar{\phi}$ (figure 6-1).

Des abaques donnant $\bar{N}_c$, $\bar{N}_q$, et $\bar{N}_\gamma$ en fonction de ϕ et $\bar{\phi}$, ainsi que $\bar{N}_{co}$ (valeur de $\bar{N}_c$ pour $\phi = \bar{\phi} = 0$) en fonction de $\frac{\bar{c}}{c}$ (voir figure 6-3) sont fournies par l'auteur [30]. Indépendamment, ce même matériau a été étudié par SALAS [82].

6.3 TRAVAUX DE SIVA-REDDY et SRINIVASAN

6.3.1. Généralités

Dans une première publication [91] ces auteurs ont étudié la force portante d'un sol bicouche purement cohérent et orthotrope d'axe vertical, par la méthode du cercle de glissement due à BUTTON [10] . Le rapport $\frac{c_{uv}}{c_{uh}}$ est le même dans les deux couches.

Ces travaux ont donné lieu à trois discussions par MEYERHOF et BROWN [67] , par RAMANATHAN [78] ,et LIVNEH et SHKLARSKY [58].

Dans une seconde publication [92] , SIVA-REDDY et SRINIVASAN ont calculé, par la méthode des caractéristiques, la force portante d'un sol possédant une cohésion augmentant linéairement avec la profondeur et orthotrope de révolution d'axe vertical, et un angle de frottement interne constant. Ce dernier article a donné lieu, à ce jour, à deux discussions par LIVNEH, GREENSTEIN et SHKLARSKY et par BOEHLER, GIROUD et OBIN [7].

Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs, suffisamment analysés dans les diverses discussions sus-mentionnées. Signalons toutefois que l'anisotropie de la cohésion est prise en compte au moyen d'une équation due à CASAGRANDE et CARILLO [15] :

$$c_{u\alpha} = c_{uh} + (c_{uv} - c_{uh}) \sin^2 \alpha$$

(où α est l'angle d'une direction quelconque avec l'horizontale)et que, d'autre part, les équations aux dérivées partielles le long des lignes bicaractéristiques sont dues à LIVNEH [56]et SHKLARSKY et LIVNEH [90].

6.3.2. Résultats

a) Dans le cas du sol purement cohérent, nous ne retiendrons que l'abaque de la figure 6-2 donnant $\bar{N}_{co}$ en fonction du rapport $\frac{c_{uv}}{c_{uh}}$, ceci pour différentes valeurs du rapport $\frac{c_2}{c_1}$ des cohésions des deux couches.

Une remarque de MEYERHOF et BROWN nous semble fondamentale :

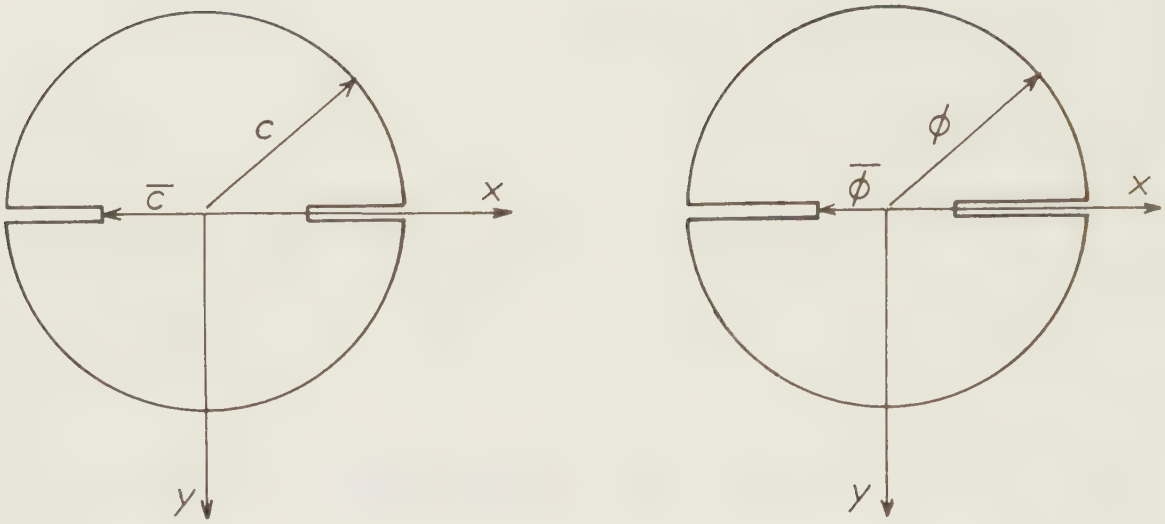


fig. 6-1 : Matériau "finement stratifié" étudié par GIROUD. Variation de la cohésion et de l'angle de frottement interne dans un plan vertical.

$$c.\cot g\ \phi = \bar{c}\ \cot g\ \bar{\phi}$$

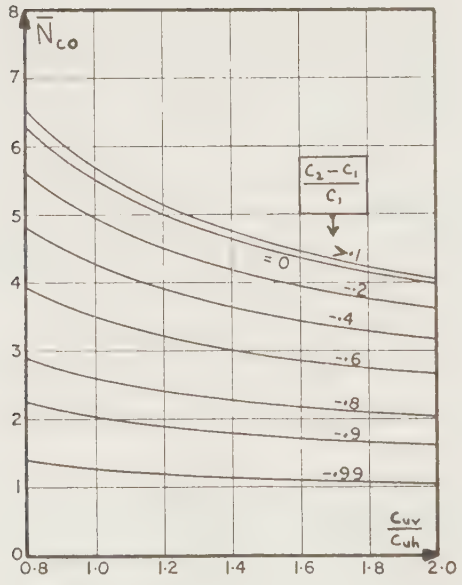


fig. 6-2 : Résultat des travaux de SIVA-REDDY et SRINIVASAN
Influence de l'anisotropie d'un sol bicouche purement cohérent sur le coefficient $\bar{N}co$, pour $\Psi = 35°$ et $\frac{H}{B} = 0.5$.

L'erreur relative sur la pression portante q est négligeable lorsqu'on emploie la moyenne arithmétique de c_{uv} et c_{uh} avec le coefficient N_c du milieu homogène pour le calcul de q :

$$q = \frac{(c_{1v} + c_{1h})}{2} . N_c$$

plutôt que le coefficient $\overline{N}_{co}$ dont les valeurs sont proposées par SIVA-REDDY et SRINIVASAN :

$$q = c_{1v} . \overline{N}_{co}$$

L'erreur relative, qui augmente lorsque $\frac{c_{uv}}{c_{uh}}$ s'éloigne de la valeur 1, peut être chiffrée à $\pm$ 5 % pour $\frac{c_{uv}}{c_{uh}} = 0.8$ et à $\pm$ 10% pour $\frac{c_{uv}}{c_{uh}} = 2$.

b) Dans le cas du sol présentant un angle de frottement interne non nul, nous retiendrons deux remarques fondamentales dues aux auteurs des discussions :

- Un matériau ne peut présenter une cohésion anisotrope et un angle de frottement interne isotrope.
- La cohésion mobilisée dans une direction, à savoir la cission limite du matériau le long d'une ligne de glissement (bicaractéristique du champ cinématique) ne doit pas être confondue avec la cohésion apparente dans une direction, mesurée par exemple lors d'un essai de compression simple suivant cette direction.

6.4. TRAVAUX DE DAVIS ET CHRISTIAN

6.4.1. Généralités

Dans une publication récente, DAVIS et CHRISTIAN [18] proposent une étude très complète de la force portante d'un sol purement cohérent, homogène et orthotrope de révolution d'axe vertical. Cette étude comprend :

a) La définition d'un critère d'écoulement pour des argiles anisotropes

b) Un calcul du coefficient $\bar{N}_c$ par la méthode des caractéristiques.

c) Une vérification, à partir de données expérimentales, du critère proposé.

d) Des formules approchées fournissant un minorant de la pression portante limite lorsque les mesures des propriétés anisotropes du sol ont été insuffisantes.

6.4.2. Hypothèses

- Sol homogène purement cohérent ($\phi = 0°$)
- Déformation plane
- Critère d'écoulement :

$$\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} - \frac{c_{uv} - c_{uh}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} = a^2 \qquad (6\text{-}1)$$

Remarque : Cette formule est une généralisation de celle proposée par HILL [36], concernant les métaux anisotropes :

$$\frac{(\sigma_y - \sigma_x)^2}{4(1-t)} + \tau_{xy}^2 = T^2 \qquad (6\text{-}2)$$

Si on trace dans les axes $\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$ et τ_{xy} l'équation (6-1) représentant le critère d'écoulement, on obtient (voir figure 6-3) une ellipse, dont les coordonnées polaires sont $c_{u\alpha}$ et $\pi - 2\alpha$, et dont les demi-axes ont pour grandeurs respectives les constantes a et b de la formule (6-1).

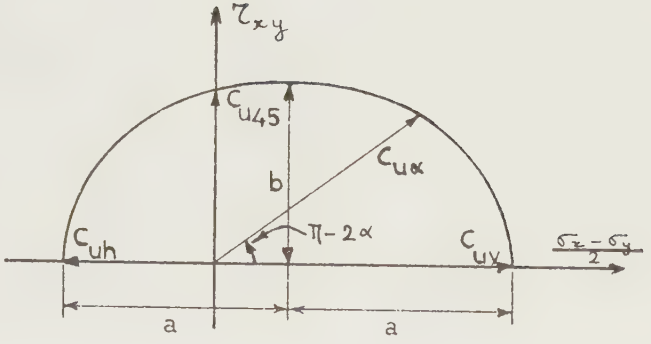


fig. 6-3 : Représentation du critère d'écoulement d'un sol anisotrope purement cohérent de DAVIS et CHRISTIAN.

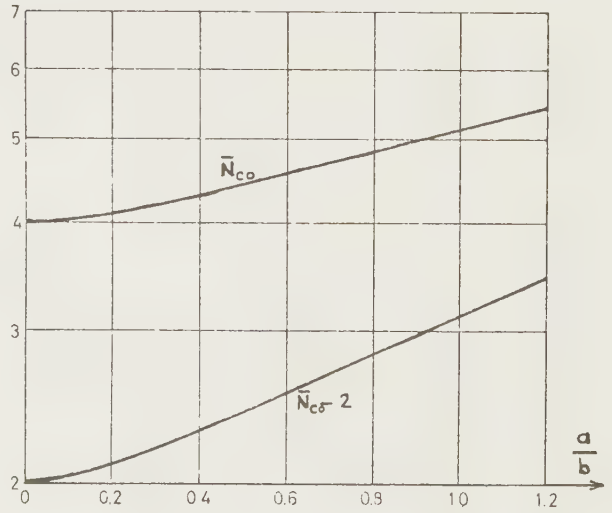


fig. 6-4 : Résultat des travaux de DAVIS et CHRISTIAN pour un sol anisotrope purement cohérent.

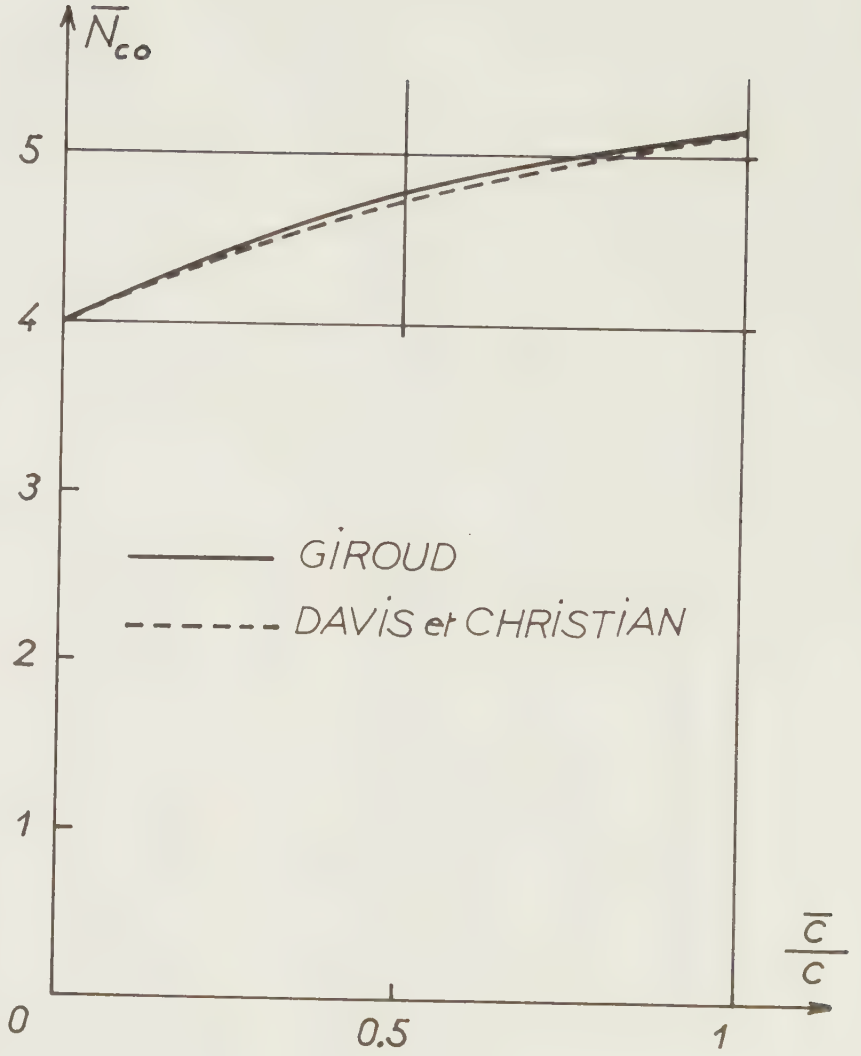


Fig. 6-5 : Comparaison des résultats de DAVIS et CHRISTIAN et de GIROUD, pour un sol purement cohérent.

$$\frac{\bar{c}}{c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c_{uv} \cdot c_{uh}}{c_{u.45}}$$

On a alors la relation :

$$\frac{b}{a} = \frac{c_{u45}}{\sqrt{c_{uv} \cdot c_{uh}}} \qquad (6\text{-}3)$$

6.4.3. Déroulement des calculs

L'équation (6-1) se ramène à l'équation (6-2), en posant :

$$\sigma_y^* = \sigma_y - \frac{c_{uv} - c_{uh}}{2}$$

et

$$\sigma_x^* = \sigma_x + \frac{c_{uv} - c_{uh}}{2}$$

Il s'ensuit que la méthode de résolution proposée par HILL [36] peut intégralement être adoptée avec le critère (6-1). On trouvera la description de cette méthode de résolution en annexe à l'article de CHRISTIAN et DAVIS.

Les équations vérifiées le long des bicaractéristiques sont :

$\sigma + a.G(\theta) = \text{cste}$ le long de la famille α.
$\sigma - a.G(\theta) = \text{cste}$ le long de la famille β.

θ étant l'angle que fait une bicaractéristique de la famille α avec l'axe des x, et $G(\theta)$ une fonction de θ faisant intervenir des intégrales elliptiques de seconde espèce.

Les bicaractéristiques du champ statique et du champ cinématique coïncident. Il n'en est pas de même pour les directions principales de ces deux champs.

6.4.4. Résultats

a) Le réseau des bicaractéristiques est identique à celui obtenu par PRANDTL pour un milieu homogène isotrope, le coefficient $\overline{N}_{co}$ est donc analytique :

$$\overline{N}_{co} = 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \sin^2 \sigma} \cdot d\sigma \qquad (6\text{-}4)$$

On trouvera sur la figure 6-4 les valeurs de ce coefficient en fonction du rapport $\frac{a}{b}$.

Remarque : En faisant a = b dans la formule 6-4, on retrouve la valeur $N_c = 2 + \pi$ correspondant au milieu homogène isotrope.

b) La concordance est excellente entre les valeurs de $C_{u\alpha}$ déduites de l'équation 6-1 (ellipse), et les valeurs expérimentales trouvées dans la littérature. La concordance est nettement moins bonne avec l'équation de CASAGRANDE et CARILLO :

$$c_{u\alpha} = c_{uh} + (c_{uv} - c_{uh}) \cdot \sin^2 \alpha$$

On remarquera que la construction de cette dernière courbe nécessite la connaissance de c_{uv} et de c_{uh}, tandis que pour construire l'ellipse de la figure 6-3, c'est-à-dire pour utiliser le critère (6-1), il faut disposer de c_{uv}, de c_{uh}, et de c_{u45}.

Le lecteur intéressé par ces comparaisons, poura consulter les figures 4 à 9 de la référence [18].

c) Après une étude bibliographique des valeurs du rapport $\frac{b}{a}$, d'après des mesures de c_{uv}, c_{uh} et c_{u45}, les auteurs proposent deux formules approchées donnant des minorants q' de q.

- Si la valeur de c_{u45} est inconnue, alors $q' = 0.90 \frac{c_{uv} + c_{uh}}{2} \cdot Nc$

- Si les valeurs de c_{uh} et c_{u45} sont inconnues, alors $q' = 0.85 . c_{uv} . N_c$

6.4.5. Remarque

Nous avons comparé les résultats de DAVIS et CHRISTIAN et ceux de GIROUD. Pour cela, il suffit de considérer le matériau étudié par ce dernier auteur comme anisotrope en posant : $c_{uv} = c_{u45} = c$

$$c_{uh} = \overline{c}$$

avec $$\phi = \overline{\phi} = 0°$$

Il vient alors : $$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\overline{c}}{c}}$$

Nous avons porté sur la figure 6-5 les valeurs de $\overline{N}_{co}$ proposées par DAVIS et CHRISTIAN et celles calculées par GIROUD, en fonction de $\frac{c}{c}$.

Les deux courbes ainsi obtenues coïncident presque.

CHAPITRE VII

NOTES SUR LA FORCE PORTANTE DE POINTE DES FONDATIONS PROFONDES

7.1. INTRODUCTION :

Dans le chapitre 3, au § 3.7.3. , nous avons déjà abordé la question des fondations semi-enterrées ou profondes. Il s'agissait alors d'évaluer la force portante limite d'un sol tricouche, la semelle reposant sur la couche intermédiaire (cf. figure 3.20, p.86). On remarque que le cas où les couches 1 et 2 sont formées d'un même matériau (sol bicouche, fondation enterrée) apparaît comme le cas paritculier où $\gamma' = \gamma$.

7.2. SOL TRICOUCHE :

Il s'agit de généraliser la formule 3.13, p.87, au cas où les 3 couches de sol sont absolument quelconques.

Un raisonnement tout à fait analogue à celui qui a permis d'établir la formule 3.13 nous conduit, en employant les notations du chapitre 3, à :

$$q_D = q + \alpha . \gamma' . DN_{q1}$$

c'est à dire :

$$q_D = \frac{1}{2} \gamma . BN_{c\gamma} + \alpha . \gamma' . DN_{q1}$$

où : $\alpha = 1$ pour $B < B_1$

$$\alpha = \frac{N_{q2}}{N_{q1}} . (1 + \varepsilon . \frac{H}{B}) \quad \text{pour} \quad B > B_1$$

avec :

$$B_1 = \frac{\varepsilon . H . N_{q2}}{N_{q1} - N_{q2}}$$

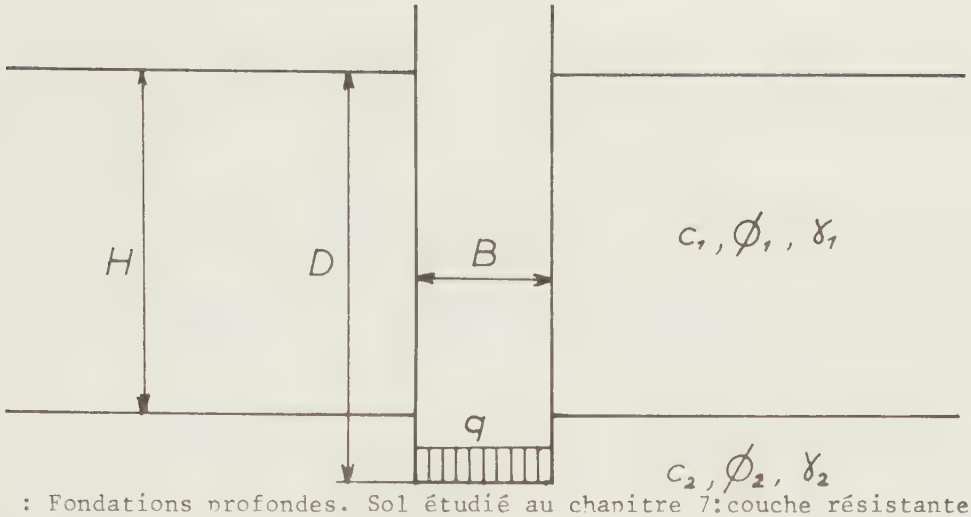


fig.7.1. : Fondations profondes. Sol étudié au chapitre 7:couche résistante (c_2 , ϕ_2 , γ_2) surmontée d'une couche moins résistante (c_1 , ϕ_1 , γ_1)

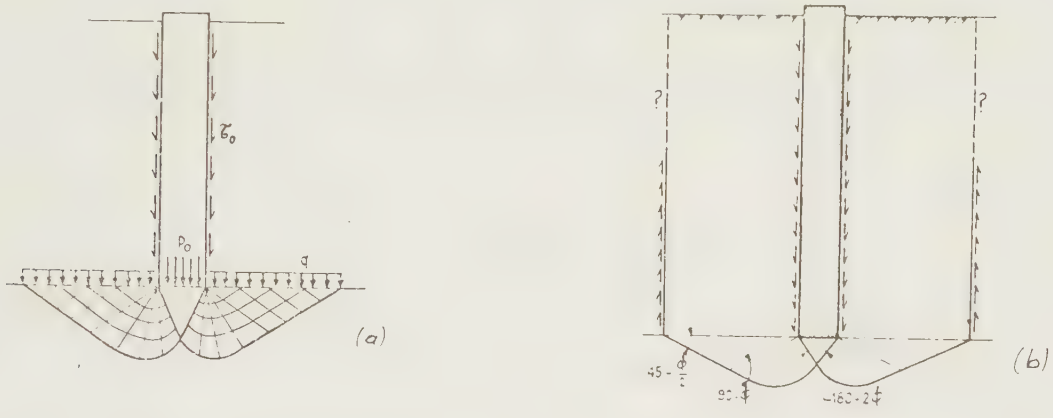


fig.7.2. : Schémas de rupture selon
a) CAQUOT
b) TERZAGHI

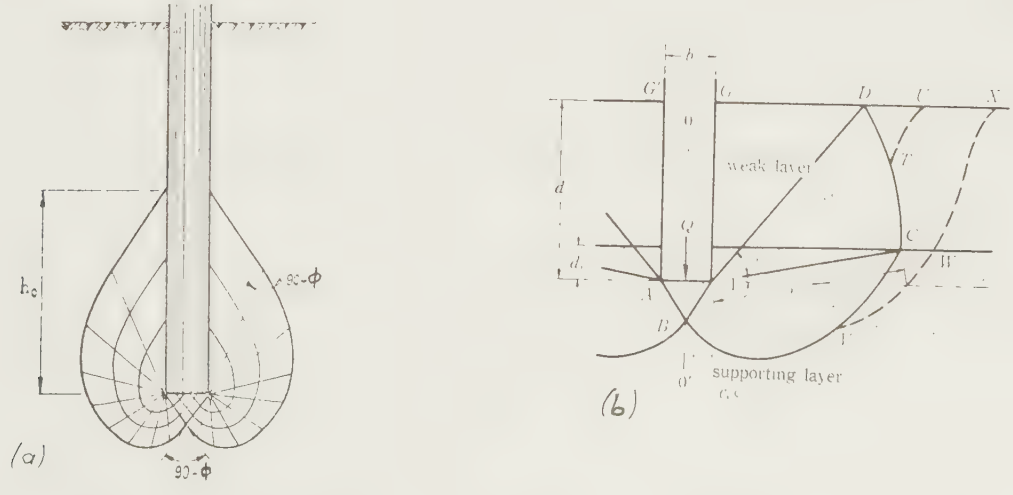


fig.7.3. : Schémas de rupture selon a) MEYERHOF ; b) YOKOYO, YAMAGATA et NAGAOKA

et : $\varepsilon = +1$ pour $\phi_2 < \phi_1$

$\varepsilon = -1$ pour $\phi_2 > \phi_1$

(les indices 1 correspondent à la couche n°2, les indices 2 à la couche n°3)

1) Cette formule, empirique, permet de calculer la force portante limite d'une fondation semi-enterrée, donc de généraliser les résultats du chapitre 2.

2) Les hypothèses sur lesquelles est fondé son établissement sont :

- superposition d'un terme de surface et de cohésion ($\frac{1}{2}\,\gamma.BN_{c\gamma}$) et d'un terme de surcharge ($\alpha.\gamma'.DN_{q1}$) selon la formule de TERZAGHI.
- variation continue, proportionnellement à $\frac{H}{B}$, du terme de surcharge entre les valeurs extrêmes $\gamma'.D.N_{q1}$ et $\gamma'.D.N_{q2}$.

3) La formule 3.13 apparaît comme le cas particulier où $N_{q2} = 1$.

7.3. SOL BICOUCHE :

C'est le sol représenté sur la figure 7.1 : la semelle repose sur une couche résistante profonde, surmontée d'une couche meuble.

Si l'on se conforme aux travaux de CAQUOT et KERISEL [13] ou à ceux de TERZAGHI [109] , il n'y a aucune difficulté à trouver la force portante limite de pointe :

$$q = \frac{1}{2}\,\gamma_2.BN_\gamma + c_2.N_c + \left[\gamma_1.H + \gamma_2.(D-H)\right].N_q$$

où N_c , N_q et N_γ sont calculés en employant les caractéristiques mécaniques de la couche profonde. (figure 7.2).

Si l'on préfère se référer aux travaux de MEYERHOF [66], comme l'ont fait YOKOWO, YAMAGATA et NAGAOKA [117] , le calcul devient extrêmement complexe.

Les hypothèses de schéma théorique proposé par ces auteurs (figure 7.3.) sont les suivantes :

- milieu non pesant en dessous de la ligne GADUX (figure 7.3), pesant au dessus.
- déformations planes
- plasticité parfaite, hypothèse du potentiel plastique dans les 2 couches.

Le calcul est mené en s'inspirant de la théorie développée par MEYERHOF pour une base de la fondation parfaitement rugueuse, ou lisse (pas de contrainte tangentielle mobilisée).

Plusieurs remarques nous semblent s'imposer :

1) La méthode de calcul extrêmement élaborée, on pourrait dire sophistiquée, choisie par les auteurs, ne nous semble guère correspondre aux approximations dues aux hypothèses choisies.

2) Le nombre et la nature des paramètres à déterminer pour employer formules et abaques (caractéristiques géométriques et mécaniques des deux couches, coefficients de poussée des terres, angles de frottement sol-parois de la fondation, coefficient d'adhérence sol-parois de la fondation, pour chacune des 2 couches), ne permettent pratiquement pas à l'ingénieur de pouvoir utiliser les calculs développés.

3) Connaissant tous les paramètres énumérés ci-dessus, il est extrêmement laborieux de calculer la force portante limite de pointe (cela nécessite le passage par une dizaine d'abaques et de formules intermédiaires), si bien qu'il est impossible de comparer (sauf dans un cas particulier) les résultats donnés par cette méthode avec ceux obtenus en employant des schémas plus classiques.

Prenons l'exemple suivant :

$\phi_1 = 25°$ $\quad c_1 = 0$ $\quad \gamma_1 = 0.8$ t/m^3

$\phi_2 = 40°$ $\quad c_2 = 0$

B = 0.5 m $\quad$ D = 20 m $\quad$ H = 20 m

Dans la couche supérieure, on doit prendre :

- coefficient de poussée des terres = 1
- angle de frottement sol-parois de la fondation = 10°
- coefficient d'adhérence sol-parois de la fondation = 0

La force portante trouvée à partir de la méthode proposée par les auteurs est est 1785 t/m.

La formule de TERZAGHI nous donne rapidement 1336 t/m.

CHAPITRE VIII

ETUDE DE DEUX "CAS HISTORIQUES"

8.1. DISLOCATION D'UN OUVRAGE PAR SUITE DU FLUAGE DU SOL DE FONDATION.

Ce sinistre concerne une salle de sports construite récemment dans une ville de la région Rhône-Alpes. (figure 8.1).

8.1.1. Description de l'ouvrage.

Celui-ci comporte une vaste salle rectangulaire de 54 x 35 m, équipée le long de 3 côtés par des tribunes intérieures en béton armé et une suite de bâtiments annexes extérieurs, à simple rez-de-chaussée, couverts par une toiture-terrasse en béton armé.

8.1.2. Description du sol de fondation.

Dans l'emprise de cette construction le sol est constitué par 12 m de vase molle entre les cotes -2.50m et-14.50m (cote 0 pris au niveau fini de la salle), surmontant une couche de sable et de gravillon de 4m d'épaisseur, reposant elle-même sur 1.60m d'une marne molle. On trouve ensuite un substratum de marne compacte (figure 8.1.)

La vase présente une densité humide de 1.55, une densité sèche de 0.95 et une teneur en eau de 70%. (Ce qui correspond à un degré de saturation très voisin de 1)

Sur la vase un remblai de 1.50m d'épaisseur avait été élevé deux ans avant la construction de l'ouvrage.

8.1.3. Fondation de l'ouvrage.

L'ensemble de la structure reposait sur des pieux arrêtés dans la couche sableuse.

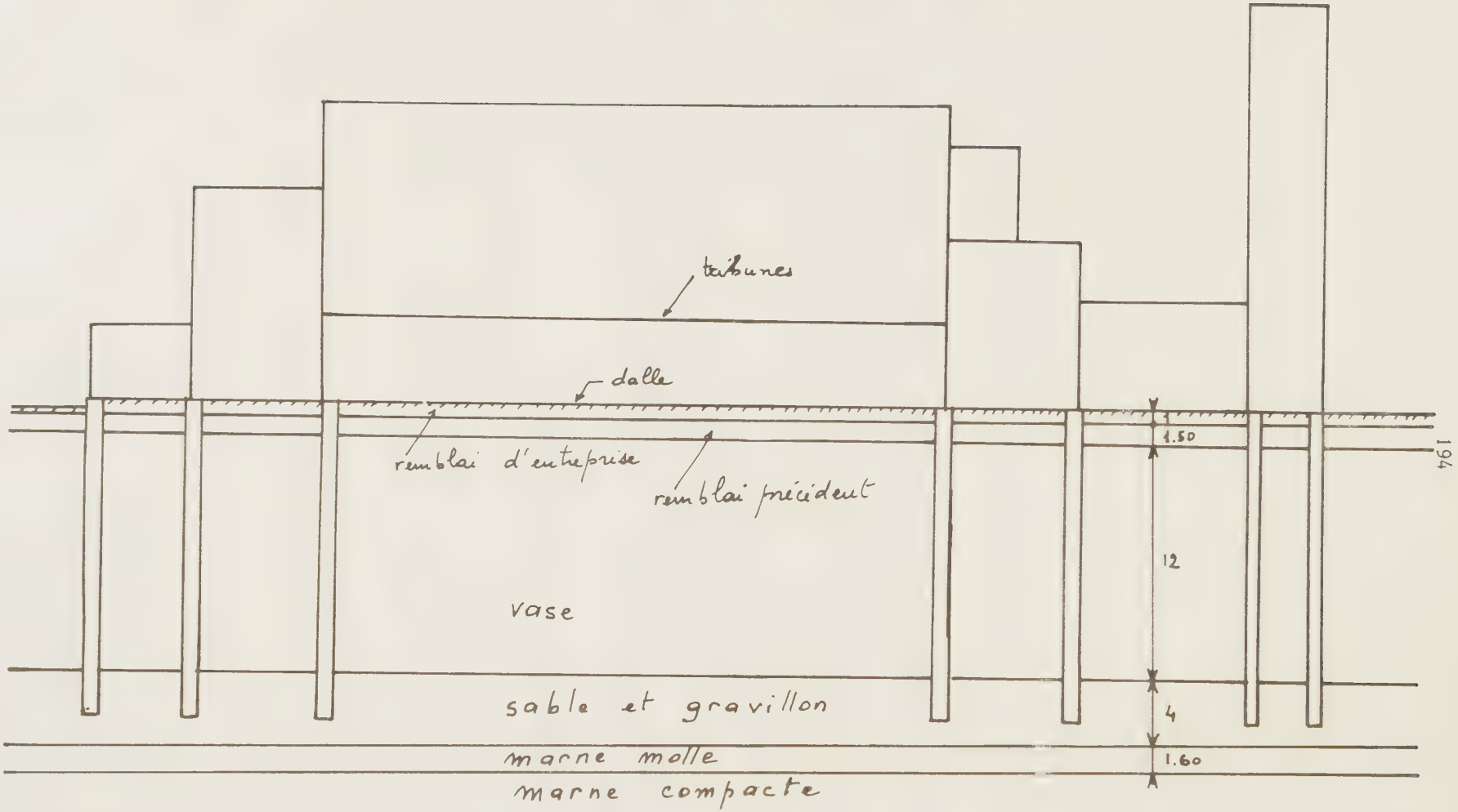

tribunes
dalle
remblai d'entreprise
remblai précédent
vase
sable et gravillon
marne molle
marne compacte
1.50
12
4
1.60
194

figure 8.1.

Les tribunes et bâtiments annexes furent fondés directement sur le remblai de 2 ans. Un dallage général en béton armé, solidaire des tribunes, des murs, et des pieux, fut posé sur toute la surface du rez-de-chaussée des différentes parties, sur un nouveau remblai de 1m d'épaisseur.

8.1.4. Description du sinistre.

- C'est le dallage qui commença à s'affaisser lentement, alourdissant de ce fait les tribunes

- Celles-ci s'enfoncèrent alors jusqu'à 35 cm, en certains points.

- L'ouvrage, considérablement alourdi reposa en grande partie sur les pieux qui poinçonnèrent alors la couche sableuse

- Les bâtiments extérieurs s'enfoncèrent pendant ce temps, de 40cm pour certains.

- L'ensemble des bâtiments fut extrêmement endommagé, les travaux de remise en état et de consolidation coûtèrent plus de 600 000 francs.

8.1.5. Calcul de la pression portante du sol.

Nous allons chercher à évaluer la pression portante limite du sol de fondation des ouvrages superficiels, le sol étant supposé constitué par un bicouche vase sur sable. Dans ces conditions nous utiliserons les calculs, abaques et notations du Chapitre 2.

Les caractéristiques de l'ouvrage et du sol peuvent être grossièrement évaluées à :

$c_1 = 0.5\ t/m^2$ $\quad \phi_1 = 0°$ pour la vase

$c_2 = 0$ $\quad \phi_2 = 30°$ pour le sable

$\gamma = 1\ t/m^3$ $\quad H = 12m$ $\quad B = 35m$

Les abaques de l'annexe II peuvent être utilisés en suivant les indications du § 2.9.

On trouve $N_{c\gamma} = 0.2$

et $q = \frac{1}{2}\ \gamma . B . N_{c\gamma} = \underline{3.5\ t/m^2}$

Or la seule présence des remblais impose une contrainte de $\underline{3.2\ t/m^2}$ sur la vase superficielle ! Il n'est donc pas étonnant que ce soit la dalle qui ait commencé à s'affaisser.

8.2. RUPTURE DU SOL DE FONDATION D'UN SILO A BLE (figure 8.2)

Ce sinistre est celui advenu en 1913, au silo de TRANSCONA près de WINNIPEG (MANITOBA) au CANADA. Le lecteur intéressé trouvera une étude complète du sinistre dans une publication d'ALLAIRE [1], et quelques photos dans l'ouvrage de LITTLE [55].

8.2.1. Ouvrage et sol de fondation.

Le bâtiment principal de l'ouvrage (le silo proprement dit) se présentait comme un parallélépipède rectangle de 92 ft. de haut et dont la base était un radier de 77 ft. sur 195 ft., de 2 ft. d'épaisseur et enfoncé de 12 ft. en dessous du niveau du sol. Les sondages ont montré que le sol était constitué d'une première couche d'argile grise, ferme, de 35 à 40 ft. d'épaisseur (c_1 = 1130 lb./sq.ft.) surmontant une autre argile comportant des inclusions rocheuses (c_2 = 650 lb./sq.ft.) jusqu'à la cote -50 ft, où l'on atteint le substratum rocheux (figure 8.2).
Les cohésions furent mesurées par des essais de compression simple, non drainés.
La densité du sol était de 120 lb./cu.ft.

8.2.2. Description du sinistre.

Commencée en 1911 la construction fut achevée en septembre 1913.
Le silo fut alors rempli de 875 000 boisseaux de blé (soit 23 000 t.). Le poids de l'ouvrage vide était de 18 000 t. Le 18 octobre 1913, immédiatement après le remplissage, l'ouvrage basculait jusqu'à présenter un angle de 26°53' avec la verticale. La majeure partie de la rotation avait eu lieu en une demi-heure.

8.2.3. Calcul de la pression portante du sol.

On considère tout d'abord le sol comme composé d'une couche d'argile ($c \backsimeq$ 1000 lb/sq.ft , $\phi = 0°$ étant donné la rapidité du sinistre), reposant sur une assise rigide. L'abaque n° 27 de l'Annexe II, avec $\frac{\gamma B}{c} \backsimeq 10$, montre que pour $\frac{H}{B} \backsimeq 0.5$, l'influence de l'existence du substratum rocheux est pratiquement nulle.
On considère donc alors le sol comme constitué de 2 couches d'argiles différentes (c_1 = 1130 lb/sq.ft. et c_2 = 650 lb/sq.ft, avec $\phi_1 = \phi_2 = 0°$). En se reportant à l'abaque n° 1 de l'annexe II, on trouve :

$N_{c1} = 4$ avec $\frac{c_2}{c_1} \backsimeq 0.58$ et $\frac{H}{B} \backsimeq 0.4$

soit $c_1 N_{c1}$ = 4520 lb/sq.ft. = 2 t/sq.ft.

La surcharge latérale $\gamma.D$ = 0.64 t/sq.ft soit $q = c_1 N_{c1} + \gamma.D N_q$ = 2.64 t/sq.ft.

La pression exercée par l'ouvrage fut évaluée, avec une bonne précision, à 2.74 t/sq.ft.

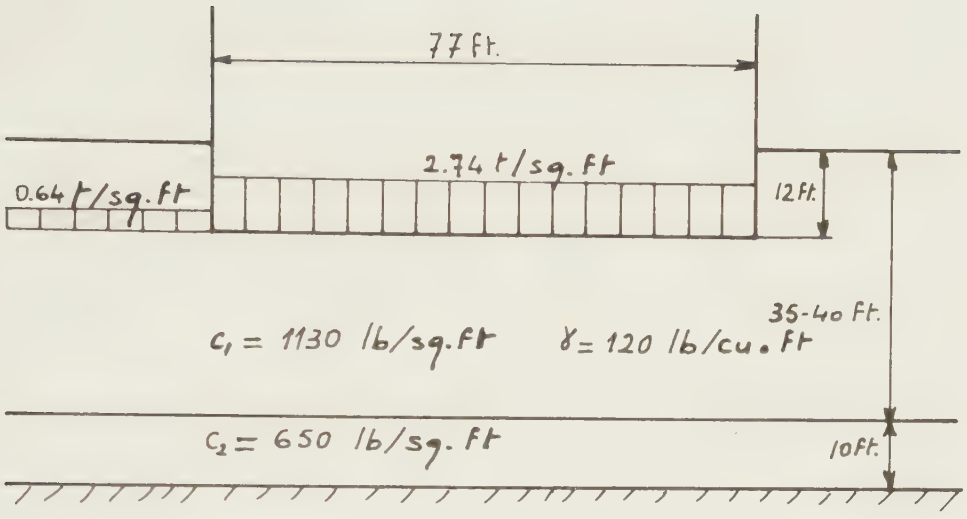


figure 8.2.

Ceci nous donne un coefficient de sécurité de $\frac{2.64}{2.74} = \underline{0.95}$.

Remarque : les calculs effectués par LITTLE, en considérant le sol comme homogène et semi-infini, amènent à un coefficient de sécurité de 1.1.

CHAPITRE IX

CONCLUSION GENERALE

Nous avons voulu mener cette étude en nous plaçant à la fois dans l'optique de l'ingénieur et dans celle du chercheur.

L'ingénieur, placé devant des problèmes concrets et souvent complexes, doit faire un choix, parmi les divers résultats de calculs qu'on lui propose et qui sont obtenus dans des cas simples plus ou moins proches de la réalité.

Le chercheur, s'attache, lui, à résoudre un problème généralement simplifié par certaines hypothèses relatives à la loi du matériau et aux conditions aux limites (critère d'écoulement, déformation plane, milieu non-pesant, etc...). Il a donc besoin de posséder une parfaite connaissance des travaux antérieurs aussi bien théoriques qu'expérimentaux sur le problème étudié et sur des problèmes voisins.

Au premier , nous fournissons des résultats approchés mais complets concernant la force portante d'un sol constitué de deux couches horizontales de caractéristiques mécaniques différentes. Ce cas de sol bicouche se rencontre plus souvent dans la réalité que celui du massif semi-infini homogène. Les résultats proposés seront complétés et publiés très prochainement.

Au second, nous apportons une étude bibliographique que nous espérons exhaustive, ponctuée de remarques qui auraient dû nous éloigner d'un certain laxisme. Nous avons, à chaque fois que cela était possible, comparé les calculs théoriques aux résultats expérimentaux, mais en nous tenant éloigné d'une synthèse purement dialectique.

Nous préférons, au terme de cette étude, tenter de dégager quelques directions de recherches pour l'avenir :

a) Pour compléter nos travaux du Chapitre II, il faudrait étudier l'influence d'une surcharge latérale uniforme à la surface du sol et comparer les valeurs ainsi obtenues à celles données par la formule empirique proposée au Chapitre VII.

Il serait également nécessaire de calculer l'erreur commise en adoptant la superposition des états d'équilibre limite (calcul séparé de deux

coefficients N_c et N_γ , plutôt que d'un seul $N_{c\gamma}$).

b) La notion de largeur optimale cernée au Chapitre III mérite certainement un approfondissement. Il serait intéressant d'étudier sa généralisation à un sol bicouche de propriétés mécaniques quelconques.

c) En ce qui concerne le problème d'une fondation, sur une couche de sol d'épaisseur limitée au voisinage d'une tranchée (Chapitre IV), nous n'avons fourni que des résultats approchés et valables pour un sol sans frottement interne.

Des résultats plus intéressants, pour un sol présentant un angle de frottement interne non nul pourraient être rapidement obtenus en exploitant les travaux théoriques de SALENÇON.

d) KANANYAN et HAERINGER ont effectué des essais d'enfoncement d'une charge rigide inclinée reposant sur une couche pulvérulente d'épaisseur limitée. Une solution théorique de ce problème pourrait sans doute s'inspirer des observations cinématiques faites au cours de ces essais et du schéma de calcul proposé par TRÂN-VÔ-NHIÊM pour le cas du massif semi-infini homogène chargé obliquement.

e) La méthode des caractéristiques, déjà utilisée par plusieurs auteurs pour un matériau verticalement non-homogène devrait pouvoir trouver quelques nouvelles applications lorsque les délicats problèmes numériques rencontrés par OSTROWSKA auront été résolus, en particulier :

- Dans le cas où la cohésion augmente avec la profondeur (avec $\phi = 0$, puis éventuellement avec $\phi \neq 0$)
- Dans le cas où les propriétés mécaniques du matériau varient par saut (cas du sol bicouche notamment), en utilisant les travaux théoriques de RYCHLEWSKI.

f) De nouvelles séries d'expériences sur modèle analogique bidimennel (petits rouleaux) pourraient être envisagées :

- Pour compléter les travaux de HAERINGER dans le sens de nos suggestions du § 4.3.3.5
- Dans le cas de deux couches horizontales pulvérulentes présentant des angles de frottement interne différents (rouleaux lisses et rouleaux sablés).

g) Enfin, il convient de rappeler, que notre étude ne concerne que le milieu bidimensionnel (semelles filantes) : les études en axisymétrie et en milieu tridimensionnel restent donc à faire.

CHAPITRE X

BIBLIOGRAPHIE

(1) E. ABSI "Fondation sur une couche purement cohérente reposant sur une assise rocheuse".
An I.T.B.T.P. n° 222 (Juin 1966).

(2) A. ALLAIRE "The failure and righting of a million bushel grain elevator".
T. ASCE, LXXX, 799 (1916).

(3) J. BIAREZ "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents.
Thèse d'Etat (1962) Grenoble.

(4) J. BIAREZ "Remarques sur les calculs de stabilité de talus".
Annales P.C. (Juillet 1962)

(5) BISHOP "On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material".
J. of Mech. Phys. of Solids. 2, 1 (1953) pp. 43-53.

(6) BJERRUM et OVERLAND "Foundation failure of an oil tank in Frederikstad, Norway".
4 th Int. Conf. SM (1957).

(7) J.P. BOEHLER, J.P. GIROUD et J.P. OBIN "Bearing capacity of footings on anisotropic soils". Discussion J. of ASCE. Vol. 97, S.M. 10 (Octobre 1971).

(8) J.D. BROWN "The ultimate bearing capacity of layered clays foundations" Thesis Ph. D. (1967) Nova-Scotia Technical College at Halifax, NS, Canada.

(9) J.D. BROWN et G. MEYERHOF "Experimental study of bearing capacity on layered clays". Proc. of Int. Conf. S.M. tome 3 (1969) Mexico.

(10) S.J. BUTTON "The bearing capacity of footings resting on a two-layers cohesive subsoil". Proc. 3rd Int. Conf. S.M. (1953) Zürich.

(11) A. CAQUOT "Méthode exacte pour le calcul de la rupture d'un massif par glissement cylindrique".
C.R. Conf. Européenne Vol. 1 (1954) Stockholm.

(12) A. CAQUOT et J. KERISEL "Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulent".
C.R. du 3e Congrès Int. de M.S. Vol. 1 (1954) Stockholm

(13) A. CAQUOT et J. KERISEL "Traité de Mécanique des sols" (1966)
Gauthier-Villars. Paris.

(14) CARIOU et CAZENAVE "Force portante d'une fondation sur un milieu bicouche."
Rapport de fin d'étude (1969). Ecole Centrale des Arts et Manufactures.

(15) A. CASAGRANDE et N. CARILLO "Shear failure of anisotropic material".
J. of Boston Soc. of Civil Eng. Vol. 31 (April 1944) n° 4
pp 122-135.

(16) I.F. COLLINS "An optimum loadnig criterion for rigid-plastic materials".
J. Mech and Phys. of Solids. Vol. 16 (1963) pp 73-80.

(17) COX, EASON et HOPKINS "Axial symetric plastic deformation in soils".
Royal Soc. London. Vol. 254. Serie A (1961). n° 10 36

(18) E.H. DAVIS et J.T. CHRISTIAN "Bearing capacity of anisotropic cohesive soil". J. of ASCE . S.M. 5 (May 1971).

(19) G. DE JOSSELIN DEJONG "Static and kinematic in the failable zone of a granular material."
Ph. D. Thesis. T. H. (1959) DELFT (N.L.).

(20) D.C. DRUCKER "Coulomb friction, plasticity and limit loads".
J. of Applied Mech, 21 (1954) p. 71

(21) D.C. DRUCKER "Concepts of path independance and material stability for soils".
Rhéologie et Mec. des sols. Symposium I.U.T.A.M. (1964) Grenoble

(22) D.C. DRUCKER et PRAGER "Soil mechanics and plastic analysis or limit design". Quart. Applied Math., 10 (1952) p. 157.

(23) B.A. DRUYANOV "Indentation of the thick plastically non-homogeneous plate, by a rigid punch".
Izv. Akad. Nauk. SSSR. Mekh. Machinoved. 2 pp. 161-166 (1959).

(24) G. FAVRETTI "Impronta di un punzone rigido su un materiale non-omogeneo".
Ingegneria Meccanica, 9, 14 (1965) pp. 37-50.

(25) W. FELLENIUS "Jordstatiska Beräkningar för vertikal Belastning på horizontal mark under autogande au circulärcylindriska glidytor".
Teknisk Tidskrift Vol. 59 (1929).

(26) O.K. FRÖLICH "General theory of stability of slopes".
Geotechnique Vol. 5 (1955) pp 37-47.

(27) J.P. GIROUD "Etude statique, en plasticité parfaite à deux dimensions, d'un massif semi-infini de sol stratifié non pesant, limité par des plans supportant une charge uniforme".
Thèse de 3e cycle (1963) Grenoble.

(28) J.P. GIROUD "Stabilité d'une fondation de barrage comprenant de fines couches d'argile". C.R. 2e Cong. Mec. Roches, 3, 8-6.
(Septembre 1970) Belgrade pp. 441-445.

(29) J.P. GIROUD "Bearing Capacity of footings on a stratified soil".
Proc. of the 4th Conf. on S.M. and foundations (October 1971).
Budapest.

(30) J.P. GIROUD "Thèse de Doctorat ès Sciences. Grenoble (1972) (A paraître).

(31) J.M. GRESILLON "Etude des fondations profondes en milieu pulvérulent".
Thèse de D.I. Grenoble (1970).

(32) P. HABIB "Essais de chargement sur graisse consistante d'une couche d'épaisseur limitée".
An I.T.B.T.P. n° 224 S et F n° 5 (Déc. 1951) pp 10 à 17

(33) P. HABIB et L. ŠUKLJE "Etude de la stabilité des fondations sur une couche d'argile d'épaisseur limitée".
An I.T.B.T.P. n° 83 (Nov. 1954) S et F n° 15

(34) J. HAERINGER "Contribution à l'étude de la force portante des fondations de surface en milieu pulvérulent à deux dimensions." Thèse de 3e cycle (1964) Grenoble.

(35) W. HARTMANN "Uber die Integration der Differential Gleichungen des ebenen Gleichgewichtszuztandes für den allgemein plastichen". Thèse Université de Göttingen (1925).

(36) R. HILL The mathematical theory of plasticity (1950). Clarendon Press.

(37) R. HILL "On the state of stress in a plastic - rigid body at the yield point". Phil. Mag. 42. (1951) p. 868.

(38) B. JAKOBSON "The design of embankments on soft clays". Geotechnique Vol. 1 n° 2 (1948) pp 80-90.

(39) C.H.C. JAMES, R.J. KRIZEK et W.H. BAKER "Bearing capacity of purely cohesive soils with a non-homogeneous strength distribution". H.R.B., 282 (1969).

(40) W. JOHNSON et H. KUDO "The compression of rigid perpectly plastic material between rough parallel dies of unqual width". Int. J. Mech. Sc., 1, 4 (1960) p. 336.

(41) A.R. JUMIKIS "Stability analysis of soil foundation systems"(1965) Rutgers. State University.

(42) A.S. KANANYAN "Experimental investigation of the stability of foundation beds of finite thickness". Soil Mech. and Found. Eng. n° 5 (Sept. Oct. 1971).

(43) Y. KOIZUMI : From :"Report on subsoil investigation at yokkaïdi City" (1954) (en Japonais).

(44) Y. KOIZUMI "Bearing capacity of a footing resting on two-layers (sand-clay)". Report of Architectural Institute of Japan (1959) (en Japonais).

(45) W. KOWALCZYK "The indentation problem of a semi-infinite transversally non-homogeneous body acted on by a rigid punch". Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Sc. Tech., 4, 13 (1965) pp 193-200.

(46) J. KRAVTCHENKO "Cours de 3e cycle de Méthodes Mathématiques de la Mécanique". D.E.A. de Mécanique des Sols (1970) Grenoble.

(47) J. KRAVTCHENKO et R. SIBILLE "Calcul des solutions approchées dans les problèmes d'équilibre limite plan et de révolution des milieux pesants obéissant à la loi de Coulomb". Rhéologie et Méc. des Sols. Symposium I.U.T.A.M. (1964) Grenoble.

(48) A.I. KUZNETZOV "The problem of torsion and plane strain of non-homogeneous plastic bodies".
Arch. Mech. Stos, 10, 4 (1958) p. 447.

(49) T.W. LAMBE et R.V. WHITMAN "Soils Mechanics" (1969).
John Wiley and Sons, Inc.

(50) Y. LEBEGUE et P. VANEL "Fondations superficielles et semi-enterrées reposant sur un milieu stratifié".
An. I.T.B.T.P. n° 210 (Juin 1965).

(51) Y. LEBEGUE "Fondations sur du sable reposant sur une vase ou une argile".
An. I.T.B.T.P. n° 222 (Juin 1966)

(52) Y. LEBEGUE "Fondations sur du sable reposant sur une vase ou une argile".
An. I.T.B.T.P. n° 234 (Juin 1967).

(53) Y. LEBEGUE "Fondations sur un milieu stratifié purement pulvérulent".
An. I.T.B.T.P. n° 246 (Juin 1968).

(54) Y. LEBEGUE "Fondations superficielles reposant sur un milieu bicouche".
An. I.T.B.T.P. n° 258 (Juin 1969).

(55) A.L. LITTLE "Foundations" (1961).
Edward Arnold ltd. London.

(56) M. LIVNEH "The strength of asphaltic concrete in spliting and compression tests". D. Sc. Thesis (1962) Technion Israël Institute of Technology. Haïfa.

(57) M. LIVNEH "The theorical bearing capacity of soils on a rock foundation"
Proc. Int. Conf. S.M. 3/26 (1966) Montreal.

(58) M. LIVNEH et E. SHKLARSKY "The bearing capacity of asphaltic concrete carpets surfacing".
Proc. of Int. Conf. on the structural design of asphalt pavement. (1962) Ann. Arbor pp 345-353.

(59) M. LIVNEH et E. SHKLARSKY "Bearing capacity of footings on layered clays". Discussion J. of A.S.C.E., 95, S.M.2. (March 1968).

(60) K.Y. LO et V. MULLIGAN : "Shear strength properties of two stratified clays". J. of the S.M. and F.D., A.S.C.E., vol 93 n° SM 1 (Janvier 1967)pp 1 - 15.

(61) H. LUNDGREN et K. MORTENSEN "Determination of the bearing capacity of a continuous footing on sand".
Proc. 3rd Int. Conf. on S.M. t 1. (1953) Zürich. p 409.

(62) J. MANDEL "Mécanique des milieux continus", II . Gauthier-Villars, (1966) Paris.

(63) J. MANDEL "Conditions de stabilité et postulat de DRUCKER".
Rhéologie et Mécanique des Sols. Symposium I.U.T.A.M. (1964) Grenoble.

(64) J. MANDEL et J. SALENÇON "Poinçonnement d'un bicouche à interface lisse en déformation plane". CRAS tome 268 série A (17 Février 1969).

(65a) J. MANDEL et J. SALENÇON "Force portante d'un sol sur assise rigide".
Proc. 7th Int. Conf. S.M. t 3 (1969) Mexico.

(65b) J. MANDEL et J. SALENÇON "Force portante d'un sol sur assise rigide. (Etude théorique)" Geotechnique (1972) (A paraître).

(66) G. MEYERHOF "The ultimate bearing capacity of foundations". Geotechnique Vol. 2 (1951) p 301.

(67) G. MEYERHOF et J.D. BROWN "Bearing capacity on layered clays".
Discussion J. of ASCE, S.M. 5, part. 1 (Septembre 1967).

(68) G. MEYERHOF et T. CHAPLIN "The compression and bearing capacity of cohesive layers". Britsh J. of Applied Phys. Vol. 4 n° 1 (1953) pp 20-26.

(69) D. MIHLOVIC "Quelques observations concernant la force portante d'une fondation dans un milieu hétérogène". Sols - Soils, II, 4 (1963).

(70) D. MIHLOVIC et TOURNIER Journées françaises de Mécanique des Sols. An. I.T.B.T.P. (1972) (A paraître)

(71) A. NADAI "Z. Phys.", 30, p 106. (1924)

(72) J. OHDE "Grundbaumeckanik". Hütte III. 28. Auflage. Verlag W. Ernst und Sohn. Berlin (W) (1956).

(73) W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI et W. URBANOWSKI "Plasticity under non-homogeneous conditions". Advances in applied Mech., 7 (1962) pp 131 - 214.

(74) J. OSTROWSKA "Initial plastic flow of semi-space with a strong layer non-homogeneity". Arch. Mech. Stos. 6, 20 (1968) pp 651-668.

(75) L. PRANDTL "Z. Angew. Math. und Meck." 3, p 401 (1923)

(76) D. RADENKOVIC "Théorie des charges limites" Séminaire de Plasticité par J. MANDEL-PST n° 116 (1962).

(77) D. RADENKOVIC et J. SALENÇON "Equilibre limite et rupture en mécanique des sols" C.R. des Journées Nat. de M.S. (Mai 1971) Paris.

(78) B. RAMANATHAN "Bearing capacity of footings on layered clays". Discussion J. of ASCE, S.M. 6 (Novembre 1967).

(79) J. RYCHLEWSKI "Plane plastic strain problem of a wedge with jump non-homogeneity". J. Mecanique 3,4 (1964).

(80) J. RYCHLEWSKI "Plane plastic strain for jump non homogeneity". Int. J. of non-linear Mech. 1 (1966) pp 57-78.

(81) J. RYCHLEWSKI et J. OSTROWSKA "On the initial plastic flow of a body with arbitrarily small non-homogeneity". Arch. Mech. Stos. 5,I5 (1963) pp 697-710.

(82) SALAS "Discussion in shallow foundations division". Proc. 6th Int. Conf. S.M. Vol. 3. (1965) Montreal pp 415-417.

(83) J. SALENÇON "Sur la solution du problème du poinçonnement d'une plaque par un poinçon rectangulaire rigide (def. plane)". CRAS t. 264. Série A. (29 Mars 1967).

(84) J. SALENÇON "Poinçonnement d'une plaque par 2 poinçons symétriques en def. plane : cas où l'épaisseur de la plaque est inférieure à la largeur des poinçons". CRAS t. 265. Série A. (18 Décembre 1967).

(85) J. SALENÇON "Etude du poinçonnement d'un bicouche en def. plane". CRAS t. 266. Série A. (17 Juin 1968).

(86) J. SALENÇON "La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane". Première thèse de Doctorat d'Etat (1969). Paris.

(87) M.A. SENS "Etude de la stabilité de barrages et gabions". Thèse de D.I. Grenoble 1971.

(88) SCOTT "Principles of soils Mechanics" (1963) Readnig Mass. Addisson - Wesley.

(89) R.T. SHIELD "Brief Note". J. of Applied Mech. 21 (1954) p 193.

(90) E. SHKLARSKY et M. LIVNEH "Equations of slip-limes in an anisotropic cohesive medium". Bull. of the research Council of Israël Vol. 10-C, n° 4 (Janvier 1962) pp 159-170.

(91) A. SIVA - REDDY et R.J. SRINIVASAN "Bearing capacity of footings on layered clays". J. of ASCE Vol. 93, S.M. 2 (March 1967) et Vol. 95, S.M. 1 (January 1969).

(92) A. SIVA - REDDY et R.J. SRINIVASAN "Bearing capacity of footings on anisotropic soils". J. of ASCE Vol. 96, S.M. 6 (Novembre 1970).

(93) A.W. SKEMPTON "The bearing capacity of clays".
Proc. of building res. Cong. Part III (1951) London.

(94) A.W. SKEMPTON "The $\phi = 0$ analysis and its theorical basis".
Proc. 2nd Int. Conf. S.M. Vol. 1 (1948) Rotterdam pp 72-78.

(95) Z. SOBOTKA "Problèmes de l'équilibre limite des sols non-homogènes".
Rhéologie et Mec. des sols. IUTAM Symposium (1964) Grenoble.

(96) V.V. SOKOLOVSKY "Théory of Plasticity". Ch. 8 Moscou (1946).

(97) V.V. SOKOLOVSKY "Statics of soil media" Butterworths scientific publications (1960). London.

(98) G. SOWADA "Zur Creuztragkraft des Baugrundes unter besonderer Berücksichtigung des Swei-Schichten- Problems".
Wissenschaftliche Zeitschrift des Hochschule für Bauwesen Leipzig. (3. 1967) Leipzig (R.D.A.).

(99) A.J.M. SPENCER Perturbation method in plasticity. I : Plane strain of non-homogeneous plastic solids". J. Mech. and Phys. Solids 4,9 (1961).

(100) A.J.M. SPENCER "Circular and logarithmic spiral slip surfaces".
J. of ASCE. S.M. and F.D. (January 1969) S.M. 1.

(101) P. STUTZ "Contribution à l'étude de la loi de déformation plastique des sols". Thèse 3e cycle (1963). Grenoble.

(102) L. ŠUKLJE "Capacité portante des couches cohérentes peu perméables d'épaisseur limitée". C.R. de la Soc. Yougoslave de M.S. n° 1.9 (1954) Ljubjana.

(103) D.W. TAYLOR "Stability of earth slopes". J. of the Boston Soc. of Civil Eng. (Juillet 1937).

(104) D.W. TAYLOR "Fundamentals of soils Mechanics" (1948). J. Wiley and Sons Inc. New-York.

(105) Y. TCHENG "Stabilité d'un dépôt de minerai sur une couche d'argile d'épaisseur limitée".
Proc. 3rd Int. Conf. S.M. Vol. 2 (1953) Zürich.

(106) Y. TCHENG "Pouvoir portant d'un solide composé de 2 couches plastiques différentes." Thèse d'Etat (1956) Paris.

(107) Y. TCHENG "Fondations superficielles en milieu stratifié".
Proc. 4th Int. Conf. S.M. (1957) London.

(108) Y. TCHENG "Fondations superficielles et semi-enterrées en milieu stratifié horizontalement".
An. I.T.B.T.P. n° 198 (Juin 1964).

(109) K. TERZAGHI "Theorical soil mechanics"(1943)
J. Wiley and Sons Inc. New-York.

(110) K. TERZAGHI et R.B. PECK "Mécanique des sols appliquée"(1961) Dunod Paris.

(111) E. TOCHKOV "Determination of the height of sand-cushions on soft soils".
Proc. 5th Int. Conf. S.M. Vol. 1 (1961) p 837.

(112) TRÂN-VÔ-NHIÊM "Contribution à l'étude de la force portante limite des fondations superficielles sur un milieu à 2 dimensions: fondations à charge inclinée et excentrée et fondations sur talus".
Thèse de 3ème cycle (1965) Grenoble.

(113) TRÂN-VÔ-NHIÊM "Force portante limite des fondations superficielles et résistance maximale à l'arrachement des ancrages."
Thèse de D.I. (1971) Grenoble.

(114) S. VYALOV "Bearing capacity of weak soil layer with underlying rigid base".
Proc. 3rd Asian Reg. Conf. on S.M. and F.E. Vol. 1 (1967)
Haïfa. pp 245-247.

(115) H. YAMAGUCHI "Practical formula of bearing value for two-layered ground".
Proc. 2rd Asian Reg. Conf. S.M. (1963) p 176.

(116) H. YAMAGUCHI et M. TERASHI

"Ultimate bearing capacity of the multi-layered ground".
4e Conf. Reg. Asiatique de M.S. 1 - 16 (Juillet 1971)
Bangkok pp 99-105.

(117) Y. YOKOWO, D. YAMAGATA et H. NAGAOKA

"Bearing capacity of a continuous footing set on two-layered ground".
Soils and foundations V. 8 n° 3 (Sept. 1968) pp 1 - 31.

Références bibliographiques classées par chapitre :

Chapitre 2 : 2 - 3 - 4 - 6 - 10 - 11 - 13 - 14 - 25 - 26 - 33 - 38 - 39 - 41 - 49 - 55 - 88 - 97 - 100 - 101 - 103 - 104 - 110 - 112 - 113.

Chapitre 3 : 43 - 44 - 50 - 51 - 53 - 54 - 69 - 98 - 105 - 106 - 107 - 108 - 111 - 115.

Chapitre 4 : 1 - 5 - 16 - 17 - 19 - 20 - 21 - 22 - 32 - 33 - 34 - 36 - 37 - 38 - 40 - 42 - 46 - 48 - 56 - 57 - 58 - 59 - 62 - 63 - 64 - 65 - 74 - 77 - 82 - 83 - 84 - 85 - 86 - 97 - 114 - 116.

Chapitre 5 : 5 - 7 - 8 - 9 - 10 - 15 - 16 - 18 - 20 - 21 - 22 - 24 - 37 - 39 - 40 - 45 - 46 - 47 - 48 - 56 - 58 - 59 - 60 - 62 - 63 - 67 - 69 - 70 - 73 - 74 - 77 - 78 - 79 - 80 - 81 - 86 - 90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 97 - 99 - 102.

Chapitre 6 : 7 - 15 - 18 - 27 - 28 - 29 - 30 - 36 - 56 - 58 - 60 - 67 - 78 - 82 - 90 - 91 - 92.

Chapitre 7 : 66 - 117.

Chapitre 8 : 1 - 55.

A N N E X E I

A1.1 : Etude du discréminant de l'équation 2.9.

A1.2 : Calcul de la force portante du milieu bicouche le plus général.

A1.3 : Même calcul pour $c_1 = 0$

A1.4 : Même calcul pour $c_1 = c_2 = 0$

A1.5 : Etude de l'hypothèse relative à la répartition des contraintes normales sur le cercle de glissement.

A1.6 : Calcul de la force portante d'un sol où a été décelée la présence d'une nappe.

A1.7 : Programmes des calculs numériques.

A1.8 : Exemples d'abaques en coordonnées métriques.

A1.1 ETUDE DU SIGNE DE Δ'. CAS SIMPLE DU SOL HOMOGENE c , ø

$$\Delta' = (\lambda^2 w + 1M_c)^2 - (\lambda^2 - 1^2)(R_c \lambda^2 + \lambda^2 w - M_c^2)$$

Après simplifications

$$\Delta' = \lambda^2 R_c^2 (1^2 - \lambda^2) + \lambda^2 (1w + M_c)^2$$

Nous voulons connaître une condition suffisante pour que Δ' soit positif.

Or le minimum de Δ' est obtenu pour $\gamma = 0$ (milieu non pesant).

Dans ce cas $\Delta' = \lambda^2 R_c^2 (1^2 - \lambda^2) + \lambda^2 M_c^2$

et l'on étudie le signe de :

$$4c^2 r^2 \sin^2\theta \left[r^2 \sin^2\theta + \frac{B^2}{4} - rB \sin\theta - r^2 \sin^2\phi\right] + 4\theta^2 r^4 c^2$$

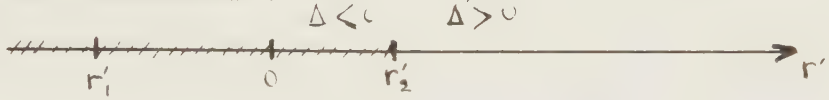
soit

$$r'^2 (\sin^2\theta \sin^2\phi - \sin^4\theta + \theta^2) + r' \sin^3\theta - \frac{\sin^2\theta}{4}$$

Le trinôme en r' dont on étudie le signe :

Le coefficient de r'^2 est toujours positif, $-\frac{\sin^2\theta}{4}$ toujours négatif. Il possède donc 2 racines r'_1 et r'_2 de signes contraires

on a le schéma suivant :



r' ne pouvant être négatif, Δ' est positif pour $r' > r'_2$

avec $$r'_2 = \frac{-\sin^3\theta + \sin^2\theta \sqrt{\theta^2 + \sin^2\theta \sin^2\phi}}{2(\theta^2 + \sin^2\theta \sin^2\phi - \sin^4\theta)}$$

Démontrons que la condition

$r' \sin\theta > \frac{1}{2}$ est suffisante pour que $r' > r'^2$;

cette condition exprime physiquement que le cercle de glissement choisi est suffisamment grand pour qu'il "emerge" de la fondation : c'est à dire AB > AA' (fig. 2.1)

Il suffit alors que $\frac{1}{2\sin\theta} > r'_2$ soit :

$$-\sin^4\theta + \sin^3\theta . \sqrt{\theta^2 + \sin^2\theta . \sin^2\phi} < \theta^2 + \sin^2\theta . \sin^2\phi - \sin^4\theta$$

Il suffit donc que

$$\sin^3\theta \sqrt{\theta^2 + \sin^2\theta . \sin^2\phi} < \theta^2$$

En élevant au carré, il vient alors :

$$\sin^6\theta (\theta^2 + \sin^2\theta . \sin^2\phi) < \theta^4$$

qui se réduit à la condition suffisante :

$$\sin^6\theta (\theta^2 + \sin^2\theta) < \theta^4$$

soit : $\frac{\theta^4}{\sin^4\theta} - \theta^2 \sin^2\theta - \sin^4\theta > 0$

On pourra vérifier que cette condition est effectivement réalisée $\forall\, \theta$; ce qui entraîne que la condition physique r' $\sin\theta > \frac{1}{2}$ est suffisante pour que l'équation(2.9) ait des racines.

Il en est de même pour les équations obtenues dans le cas d'un milieu bicouche : les calculs ci-dessus sont entièrement transposables bien que leurs expressions soient plus compliquées.

Il est à remarquer que la condition r' $\sin\theta > \frac{1}{2}$ n'entraîne pas que l'équation (2.9) ait toujours une racine positive. Effectivement, l'ordinateur nous a montré que certains cercles (r' grand, θ petit) ne pouvaient satisfaire les équations de l'équilibre.

A1.2 CALCUL DE LA FORCE PORTANTE DU MILIEU BICOUCHE LE PLUS GENERAL $(c_1, c_2, \phi_1 \phi_2)$

En se reportant à la figure (2.5) et aux notations utilisées dans la partie II, les forces qui agissent sur le segment de cercle sont :

Q

$$W = \gamma r^2 (\theta - \cos\theta \sin\theta)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{\phi_1} &= N_1 \operatorname{tg} \phi_1 \\ R_{\phi_2} &= N_2 \operatorname{tg} \phi_2 \end{aligned}\right\} \text{ qu'on peut remplacer par } R_{\phi_o} = N_o \operatorname{tg} \phi_o$$

$$R_c = 2 c_1 r \sin\theta + 2 c_1 r (m-1) \sin\psi$$

Les moments en O de ces forces sont :

$$M_Q = (r \sin\theta - \frac{B}{2})$$

$$M_c = 2c_1 r^2 \theta + 2c_1 r^2 (m-1) \psi$$

$$\left.\begin{aligned} M_{\phi_1} &= R_{\phi_1} r_{\phi_1} = r \operatorname{tg} \phi_1 L_1 \\ M_{\phi_2} &= R_{\phi_2} r_{\phi_2} = r \operatorname{tg} \phi_2 L_2 \end{aligned}\right\} \text{ qu'on peut remplacer par } M_{\phi_o} = r \operatorname{tg} \phi_o N_o$$

Moyennant les nouvelles notations, l'équation en Q est identique à l'équation(2.9):

$$Q^2 (\lambda^2 - 1^2) + 2Q (\lambda^2 W + 1 M_c) + R_c^2 \lambda^2 - M_c^2 + \lambda^2 W^2 = 0$$

On introduit alors les variables adimensionnelles.

$$r' = \frac{r}{B} \quad , \quad \gamma'_1 = \frac{\gamma B}{c} \quad \text{puis } q = \frac{Q}{B}$$

L'équation prend la forme :

$$A_2 \left[\frac{q}{c_1}\right]^2 + 2 B_2 \left[\frac{q}{c_1}\right] + C_2 = 0 \qquad (2.13)$$

avec

$$A_2 = r'^2 (\sin^2 \phi_o - \sin^2 \theta) + r' \sin\theta - \frac{1}{4}$$

$$B_2 = \gamma'_1 r'^4 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta) + 2r'^2 \left[\theta + (m-1)\psi\right] (r' \sin - \tfrac{1}{2})$$

$$C^2 = 4r'^4 \sin^2 \phi_o \left[\sin\theta + (m-1) \sin\psi\right]^2 - 4r'^4 \left[\theta + (m-1)\psi\right]^2 + r'^6 \gamma'^2_1 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta)^2$$

Pour $\phi_o = 0$ (2 couches purement cohérentes) l'équation (2.9) devient :

$$M_Q - M_C = 0$$

soit $$Q \left(r.\sin\theta - \frac{B}{2} \right) = 2c_1 r^2 \left[\theta + (m-1).\Psi \right]$$

soit en variables adimensionnelles

$$\frac{q}{c_1} \left(r'.\sin\theta - \frac{1}{2} \right) = 2r'^2 \left[\theta + (m-1).\Psi \right]$$

qui est l'équation fournie par BUTTON et dont nous nous sommes servis pour tracer l'abaque N°1 de l'Annexe II

l'équation (2.14) :

$$A'_2 N_{c\gamma}^{\ 2} + 2B'_2 N_{c\gamma} + C'_2 = 0$$

a donc pour coefficients :

$$A'_2 = r'^2 (\sin^2 \phi_o - \sin^2\theta) + r' \sin\theta - \frac{1}{4}$$

$$B'_2 = 2r'^4 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta) + \frac{4r'^2}{\gamma'_1} \left[\theta + (m-1)\Psi \right] \left(r' \sin\theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$C'_2 = \frac{16r'^4}{\gamma'^2_1} \sin^2 \phi_o \left[\sin\theta + (m-1) \sin\Psi \right]^2 - \frac{16r'^4}{\gamma'^2_1} \left[\theta + (m-1)\Psi \right]^2 + 4r'^6 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta)^2$$

A1.3 CALCUL DE LA FORCE PORTANTE DANS LE CAS DU BICOUCHE OU $c_1 = 0$

Les calculs se déroulent d'une manière analogue au cas précédent. Avec :

$$M_Q = (r \sin\theta - \frac{B}{2}).Q$$

$$M_c = 2\Psi c_2 r^2$$

$$M_{\phi o} = r \operatorname{tg} \phi_o N_o$$

$$R_{\phi o} = N_o \operatorname{tg} \phi_o$$

$$R_c = 2 c_2 r \sin \Psi$$

L'équation du second degré en Q est identique à l'équation (2.9)

On introduit ensuite les variables adimensionnelles

$$r' = \frac{r}{B} \quad , \quad \gamma'_2 = \frac{\gamma B}{c_2} \quad \text{puis} \quad q = \frac{Q}{B} \quad ;$$

L'équation prend alors la forme (2.15) :

$$A_3 = \left[\frac{q}{c_2}\right]^2 + 2B_3\left[\frac{q}{c_2}\right] + C_3 = 0$$

Avec

$$A_3 = r'^2 (\sin^2 \phi_o - \sin^2\theta) + r' \sin \quad - \frac{1}{4}$$

$$B_3 = \gamma'_2 r'^4 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta) + 2r'^2 (r'\sin\theta - \tfrac{1}{2}).\Psi$$

$$C_3 = 4r'^4 \sin^2 \phi_o \sin^2\Psi - 4r'^4\Psi^2 + r'^6 \gamma'^2_2 \sin^2 \phi_o .(\theta - \cos\theta \sin\theta)^2$$

L'équation (2.16) :

$$A'_3 N_c^2 + 2B'_3 N_c + C'_3 = 0$$

a donc pour coefficients :

$$A'_3 = r'^2 (\sin^2 \phi_o - \sin^2\theta) + r' \sin\theta - \frac{1}{4}$$

$$B'_3 = 2r'^4 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta) + \frac{4r'^2}{\gamma'_2} (r' \sin\theta - \tfrac{1}{2}).\Psi$$

$$C'_3 = \frac{16r'^4}{\gamma'^2_2} \sin^2 \phi_o \sin^2\Psi - \frac{16r'^4}{\gamma'^2_2} \Psi^2 + 4r'^6 \sin^2 \phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta)^2$$

A1.4 CALCUL DE LA FORCE PORTANTE DANS LE CAS DU BICOUCHE OU $c_1 = c_2 = 0$

Par rapport au cas précédent, les seuls forces et moments dont l'expression change sont :

$M_c = 0$

$R_c = 0$

L'équation (2.9) se simplifie en :

$$Q^2 (\lambda^2 - 1^2) + 2Q \lambda^2 W + W^2 \lambda^2 = 0$$

Le discriminant Δ' est alors un carré parfait :

$\Delta' = \lambda^2 1^2 W^2$; d'où les 2 racines;

$Q_1 = \frac{-\lambda W}{\lambda+1}$: toujours < 0

$Q_2 = \frac{\lambda W}{1-\lambda}$: > 0 si $1 > \lambda$.

soit si : $r' \sin\theta - \frac{1}{2} > r' \sin\phi_o$ (avec $r' = \frac{r}{B}$),

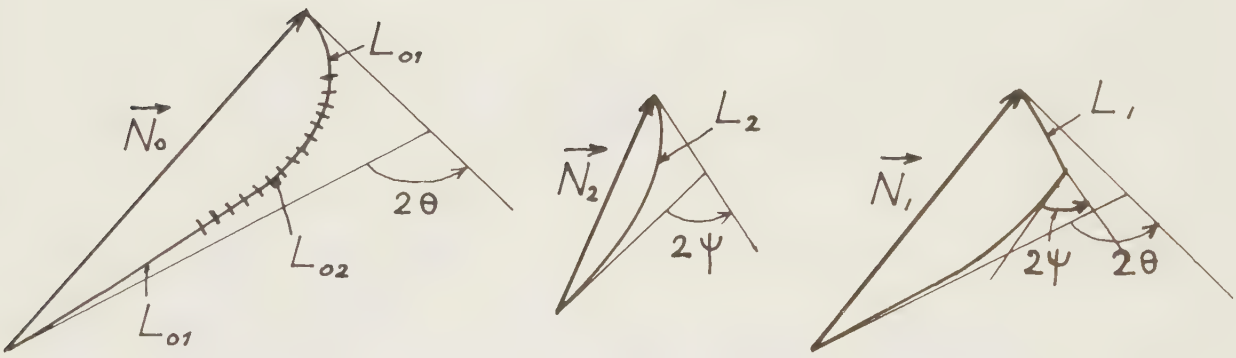
Il vient alors, en introduisant $N_\gamma = \frac{Q}{\frac{1}{2}\gamma B^2}$, l'équation (2.17) :

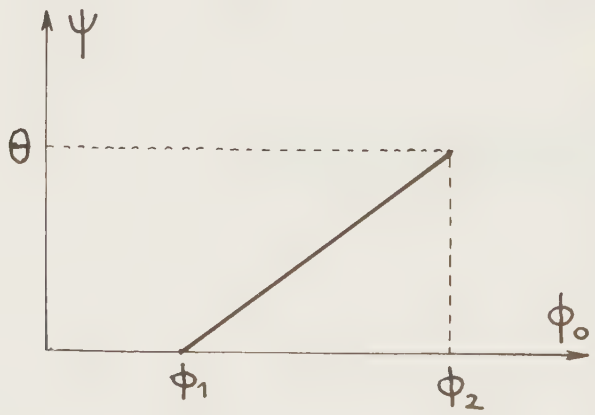
$$N_\gamma = \frac{2r'^3 \sin\phi_o (\theta - \cos\theta \sin\theta)}{r' \sin\theta - \frac{1}{2} - r' \sin\phi_o}$$

VI.5 ETUDE DE L'HYPOTHESE SUR LA REPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES SUR LE CERCLE DE GLISSEMENT.

Nous partons de l'hypothèse que la grandeur de la contrainte en un même point du cercle ne dépend pas de l'angle de frottement.

Nous voulons démontrer que $tg\phi_o \, N_o < tg\,\phi_1 \, L_1 + tg\,\phi_2 \, L_2$





soit L_o le funiculaire de 0 à 2θ des $\sigma_n(\phi_o)$

L_1 ——— 0 à ψ et de $\theta + \psi$ à 2θ des $\sigma_n(\phi_1)$

L_{o1} ——— $\sigma_n(\phi_o)$

L_2 ——— $\theta - \psi$ à $\theta + \psi$ des $\sigma_n(\phi_2)$

L_{o2} ——— $\sigma_n(\phi_o)$

1er cas $\phi_1 = \phi_2$

$$L_o = L_1 + L_2 = L_{o1} + L_{o2}$$

et $\operatorname{tg} \phi_o \, N_o < \operatorname{tg} \phi_o L_o = \operatorname{tg} \phi_1 \, L_1 + \operatorname{tg} \phi_2 \, L_2$

2e cas $\phi_1 \leqslant \phi_o \leqslant \phi_2$

Dans la couche supérieure, les composantes tangentielles des contraintes en 1 point du cercle sont telles que :

$$\sigma_n(\phi_1) \operatorname{tg} \phi_1 < \sigma_n(\phi_o) \operatorname{tg} \phi_o$$

puisque :

$$\operatorname{tg} \phi_1 < \operatorname{tg} \phi_o \quad .$$

De même dans la couche inférieure :

$$\sigma_n(\phi_o) \operatorname{tg} \phi_o < \sigma_n(\phi_2) \operatorname{tg} \phi_2$$ (voir fig. 2.6)

En intégrant le long du cercle, il vient :

$$\operatorname{tg} \phi_o \, N_{o1} \leqslant \operatorname{tg} \phi_1 \, L_1 < \operatorname{tg} \phi_o \, L_{o1}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \phi_o \, N_{o2} < \operatorname{tg} \phi_o \, L_{o2} < \operatorname{tg} \phi_2 \, L_2$$

En ajoutant :

$$\operatorname{tg} \phi_o \, (N_{o1} + N_{o2}) < \operatorname{tg} \phi_1 \, L_1 + \operatorname{tg} \phi_2 \, L_2$$

soit $\operatorname{tg} \phi_o \, N_o < \operatorname{tg} \phi_1 \, L_1 + \operatorname{tg} \phi_2 \, L_2$

3e cas $\phi_2 \leqslant \phi_o \leqslant \phi_1$

La démonstration est identique :
Dans la couche supérieure on obtient :

$$\operatorname{tg} \phi_o \, N_{o1} < \operatorname{tg} \phi_o L_{o1} < \operatorname{tg} \phi_1 L_1$$

et dans la couche inférieure :

$$\operatorname{tg} \phi_o \, N_{o2} \leqslant \operatorname{tg} \phi_{o2} L_2 < \operatorname{tg} \phi_o L_{2o}$$

soit en ajoutant :

$$\operatorname{tg} \phi_o \, (N_{o1} + N_{o2}) < \operatorname{tg} \phi_1 \, L_1 + \operatorname{tg} \phi_2 \, L_2$$

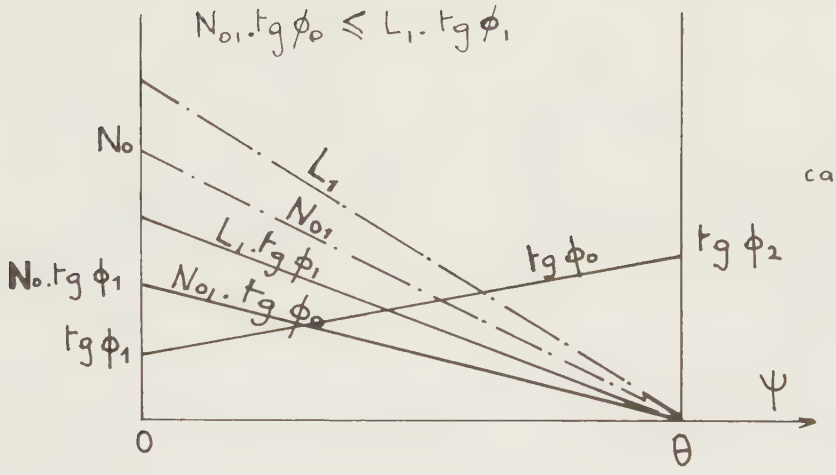
et $\operatorname{tg} \phi_o \, N_o < \operatorname{tg} \phi_1 \, L_1 + \operatorname{tg} \phi_2 \, L_2$

Nous pouvons illustrer les 2 inégalités :

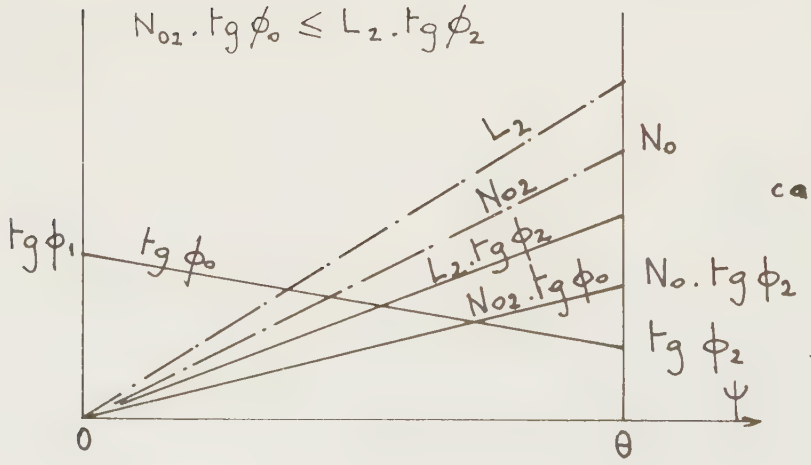
$tg\ \phi_o\ N_{o1} \leqslant tg\ \phi_1\ L_1$ (cas où $\phi_1 \leqslant \phi_o \leqslant \phi_2$)

et $tg\ \phi_o\ N_{o2} \leqslant tg\ \phi_2\ L_2$ (cas où $\phi_2 \leqslant \phi_o \leqslant \phi_1$)

dont la signification n'est pas évidente, par les 2 schémas ci-dessous :



cas où $\phi_1 \leqslant \phi_o \leqslant \phi_2$



cas où $\phi_2 \leqslant \phi_o \leqslant \phi_1$

Cherchons, dans 2 cas limites simples, à quelle condition les hypothèses que nous venons d'examiner pourraient correspondre à la théorie exacte du cercle de glissement.

1- $\underline{\phi_1 = 0 \quad \text{(sol cohérent sur sol pulvérulent)}}$

$$\phi_o = \frac{\Psi}{\theta}\ \phi_2 \leqslant \phi_2$$

$$L_o = \int_o^{2\theta} \sigma_n\, ds > N_o$$

$$L = \int_{\theta-\Psi}^{\theta+\Psi} \sigma_n\, ds > N$$

$$M_{\phi o} = r\ \mathrm{tg}\ \phi_o\ L_o > r\ \mathrm{tg}\ \phi_o\ N_o$$

$$M_{\phi} = r\ \mathrm{tg}\ \phi_2\ L > r\ \mathrm{tg}\ \phi_2\ N$$

La condition cherchée est donc que $\mathrm{tg}\ \phi_o\ N_o = \mathrm{tg}\ \phi_2\ L$

2- $\underline{\phi_2 = 0 \text{ (sol pulvérulent sur sol cohérent)}}$

$$\phi_o = \frac{\phi_1}{\theta}\ (\theta - \Psi) \leqslant \phi_1$$

$$L_o = \int_o^{2\theta} \sigma_n\, ds > N_o$$

$$L = \int_o^{\theta-\Psi} \sigma_n\, ds + \int_{\theta+\Psi}^{2\theta} \sigma_n\, ds > N$$

$$M_{\phi o} = r\ \mathrm{tg}\ \phi_o\ L_o > r\ \mathrm{tg}\ \phi_o\ N_o$$

$$M_{\phi} = r\ \mathrm{tg}\ \phi_1\ L > r\ \mathrm{tg}\ \phi_1\ N$$

La condition cherchée est donc :

$$\mathrm{tg}\ \phi_o\ N_o = \mathrm{tg}\ \phi_1\ L$$

Mieux ces conditions seront remplies, et mieux les hypothèses faites seront bonnes.

A1.6 CALCUL DE LA FORCE PORTANTE D'UN SOL OU A ETE DECELEE LA PRESENCE D'UNE NAPPE.

En se reportant à la figure (2.22) où sont mentionnées les notations, on peut écrire les expressions des forces et des moments qui agissent sur le segment du cercle de glissement considéré.

$$Q$$

$$R_c = 2 \sin\theta . cr$$

$$R_\phi = N \operatorname{tg} \phi$$

$$W_1 = \gamma_d r^2 \left[(\theta - \cos\theta . \sin\theta) - (\psi_1 - \cos\psi_1 \sin\psi_1) \right]$$

$$W_2 = \frac{2r^3}{3} \cdot \frac{\gamma_d - \gamma_{sat}}{H_1 - H_2} \cdot (\sin^3\psi_1 - \sin^3\psi_2) + \ldots$$

$$\ldots + r^2 . \frac{\gamma_{sat} H_1 - \gamma_d H_2}{H_1 - H_2} \cdot \left[(\psi_1 - \psi_2) - \frac{1}{2} (\sin 2\psi_1 - \sin 2\psi_2) \right]$$

$$W_3 = \gamma_{sat} . r^2 \left[(\psi_2 - \cos\psi_2 . \sin\psi_2) - (\psi_3 - \cos\psi_3 . \sin\psi_3) \right]$$

$$W_4 = \tilde{\gamma} . r^2 . (\psi_3 - \cos\psi_3 . \sin\psi_3)$$

$$M_Q = (r \sin\theta - \frac{B}{2}) . Q$$

$$M_c = 2 \theta cr^2$$

$$M_\phi = r . \operatorname{tg} \phi . N$$

$$\psi_1 = \operatorname{Arcos} (\cos\theta + \frac{H_1}{r_1})$$

$$\psi_2 = \operatorname{Arcos} (\cos\theta + \frac{H_2}{r_2})$$

$$\psi_3 = \operatorname{Arcos} (\cos\theta + \frac{H_3}{r_3})$$

L'équation en Q est identique à l'équation (2.9) :

$$Q^2 (\lambda^2 - \ell^2) + 2Q (\lambda^2 W + \ell . M_c) - M_c^2 + \lambda^2 W^2 + \lambda^2 R_c^2 = 0$$

En simplifiant suivant le schéma de la figure (2.23), il vient $W_2 = W_3 = 0$.

On pose $r' = \frac{r}{B}$, $H'_1 = H'_2 = H'_3 = \frac{H_3}{B}$, $\gamma'_d = \frac{\gamma_d B}{c}$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 \quad ,$$

et il vient l'équation (2.18) :

$$A_4 \, N_{c\gamma}^{\ 2} + 2B_4 \, N_{c\gamma} + C_4 = 0 \quad ,$$

avec :

$$A_4 = r'^2 (\sin^2 \phi - \sin^2 \theta) + r' \sin\theta - \frac{1}{4}$$

$$B_4 = r'^2 \sin^2 \phi . W' + \frac{4 r'^2}{\gamma'_d} . \theta . (r' \sin\theta - \frac{1}{2})$$

$$C_4 = r'^2 \sin^2 \phi \left(\frac{16 r'^2}{\gamma'^2_d} \sin^2 \theta + W'^2 \right) - \frac{16 r'^4}{\gamma'^2_d} . \theta^2 \quad .$$

où $W' = 2r'^2 \left[(\theta - \cos\theta . \sin\theta) - (\Psi_3 - \cos\Psi_3 . \sin\Psi_3) . (1 - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_d}) \right]$

On remarquera ici que le rapport $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_d} = \frac{G-1}{G}$ est une constante : 0.63

A1.7 PROGRAMMES DES CALCULS NUMERIQUES

Ci-après nous présentons les différents programmes en langage FORTRAN 1132, qui nous ont permis de réaliser nos calculs numériques. Ces calculs ont été réalisés sur l'ordinateur IBM 1132 du laboratoire.

```
PAGE   1    OBIN

// JOB                                                    OBIN

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0001        0001        0000

V2 M09   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*      NAME OBIN
*      IOCS(CARD,KEYBOARD,1132 PRINTER,PLOTTER)
*      LIST SOURCE PROGRAM

C      PROGRAMME A CERCLE DE GLISSEMENT  BICOUCHE   CI ≠ O
       REAL L ,LAMDA ,MC ,N ,     NC2 ,      NCMA,NC
       ARCOS(X)=ATAN(SQRT(1-X*X)/X)
       PI=3.14159

C      DONNEES DE CI ,C2 ,GAMMA
       GAMA=10.
       DO 23 JFJ=1,3
       FI2=FLOAT(JFJ)*10
       DO 23 IFI=1,4
       FI1=FLOAT(IFI-1)*10
       WRITE(3,101) FI1,FI2,GAMA
  101  FORMAT(1H1,36X,'FI1=',F6.1,6X,'FI2=',F6.1,6X,'GAMMA=',F7.2,///)

C       INCREMENTATION DE N
       DO 23 M=1,7
       IF(M-5) 26,26,27
   26  N=FLOAT(M-1)/2
       GOTO 28
   27  N=FLOAT(M-5)*5

C      INCREMENTATION DE H
   28  DO 11 K=1,14
       RK=FLOAT(K-1)
       IF(RK-5) 7,7,8
    7  H=RK*2/10
       GO TO 9
    8  H=1+(RK-5)/2

C      RECHERCHE D'UN MINIMUM POUR NC
    9  NCMA=10000.
       TEM2=0.
       RM2=0.
       FICM=0.
       DO 10 J=12,56,4
       P=FLOAT(J)/10
       DO 10 I=26,90,4
       RI=FLOAT(I)
       TETA=RI*PI/180

C      TEST SUR L'ABSCISSE DU CERCLE
       L=P*SIN(TETA)-1
       IF(L) 10,10,1
```

```
PAGE   2     OBIN


C       CALCUL DE ABC
      1 X=COS(TETA)+H/R
        IF(X-1) 19,20,20
     19 PSI=ARCOS(X)
        GOTO 21
     20 PSI=0.
     21 FI1R=FI1*PI/180
        FI2R=FI2*PI/180
         FIO=FI1R+PSI*(FI2R-FI1R)/TETA
        LAMDA=R*SIN(FIO)
        W=GAMA*R*R*(TETA/2-SIN(2*TETA)/4)
        MC=R*R*(TETA+(N-1)*PSI)
        RC=R*(SIN(TETA)+(N-1)*SIN(PSI))
        A4=LAMDA**2-L**2
        B4=LAMDA**2*W+L*MC
        C4=(RC*LAMDA)**2-MC**2+(W*LAMDA)**2

C       CALCUL DES RACINES NC1 NC2
        DELTA=B4**2-A4*C4
        IF(ABS(DELTA)-0.001) 13,13,14
     13 NC=-B4/A4
        IF(NC) 10,17,17
     17 IF(NC/GAMA-NCMN) 18,10,10
     18 NCMN=NC/GAMA
        TEM2=RI
        RM2=R
        FIOM=FIO
        FIOD=FIOM*180/PI
        GOTO 10
     14 IF(DELTA) 10,10,4
      4 NC2=(-B4-SQRT(DELTA))/A4
        IF(NC2) 10,12,12
     12 IF(NC2/GAMA-NCMN) 5,10,10
      5 NCMN=NC2/GAMA
        TEM2=RI
        RM2=R
        FIOM=FIO
        FIOD=FIOM*180/PI
     10 CONTINUE
C        FIN DE LA RERCHERCHE D'UN MINIMUM

        WRITE(3,100) TEM2,RM2,FIOD,N,H,NCMN
    100 FORMAT(4X,'TETA=',F3.0,4X,'R=',F4.2,10X,'FIC=',F5.2,10X,
       1           'N=',F4.1,6X,'H=',F4.1,        25X,         'NCMN=',F9.2)
        IF(RM2+0.2-RM2*COS(TEM2*PI/180)-H) 30,11,11
     11 CONTINUE
     30 WRITE(3,105)
    105 FORMAT(1H0)
     23 CONTINUE
        CALL EXIT
        END

FEATURES SUPPORTED
  IOCS
```

```
PAGE   1    OBIN

// JOB                                                    OBIN

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0001        0001        0000

V2 M08   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*      NAME OBIN
*      IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER)
*      LIST SOURCE PROGRAM

C      PROGRAMME & CERCLE DE GLISSEMENT  BICOUCHE    C1=0
       REAL L ,LAMDA ,MC ,NC2,NCMN,NC
       ARCOS(X)=ATAN(SQRT(1-X*X)/X)
       PI=3.14159

C      DONNEES
       GAMA=10.
       DO 23 IFI=1,4
       FI2=FLOAT(IFI-1)*10
       WRITE(3,101) FI2,GAMA
  101  FORMAT(1H1,40X,'FI2=',F6.1,6X,'GAMMA=',F7.2,///)

C      INCREMENTATION DE FI1 ET DE H
       DO 23 M=1,4
       FI1=FLOAT(M)*10
       DO 11 K=1,24
       RK=FLOAT(K-1)
       IF(RK-5) 7,7,8
    7  H=RK*2/10
       GO TO 9
    8  H=1+(RK-5)/2

C      RECHERCHE D'UN MINIMUM POUR NC
    9  NCMN=10000.
       TEM2=0.
       RM2=0.
       FIOM=0.
       DO 10 J=14,106,4
       R=FLOAT(J)/10
       DO 10 I=30,90,4
       RI=FLOAT(I)
       TETA=RI*PI/180

C      TEST SUR L'ABSCISSE DU CERCLE
       L=R*SIN(TETA)-1
       IF(L) 10,10,1

C      CALCUL DE ABC
    1  X=COS(TETA)+H/R
       IF(X-1) 19,20,20
   19  PSI=ARCOS(X)
       GOTO 21
   20  PSI=0.
```

```
PAGE    2     ORIN

    21 FI1R=FI1*PI/180
       FI2R=FI2*PI/180
        FIO=FI1R+PSI*(FI2R-FI1R)/TETA
       LAMDA=R*SIN(FIO)
       W=GAMA*R*R*(TETA/2-SIN(2*TETA)/4)
       MC=R*R*PSI
       RC=R*SIN(PSI)
       A4=LAMDA**2-L**2
       B4=LAMDA**2*W+L*MC
       C4=(RC*LAMDA)**2-MC**2+(W*LAMDA)**2

C      CALCUL DES RACINES NC1 NC2
       DELTA=B4**2-A4*C4
       IF(ABS(DELTA)-0.0001) 13,13,14
    13 NC=-B4/A4
       IF(NC) 10,17,17
    17 IF(NC/GAMA-NCMN) 18,10,10
    18 NCMN=NC/GAMA
       TEM2=RI
       RM2=R
       FIOM=FIO
       FIOD=FIOM*180/PI
       GOTO 10
    14 IF(DELTA) 10,10,4
     4 NC2=(-B4-SQRT(DELTA))/A4
       IF(NC2) 10,12,12
    12 IF(NC2/GAMA-NCMN) 5,10,10
     5 NCMN=NC2/GAMA
       TEM2=RI
       RM2=R
       FIOM=FIO
       FIOD=FIOM*180/PI
    10 CONTINUE
C       FIN DE LA RERCHERCHE D'UN MINIMUM

       WRITE(3,100) TEM2,RM2,FIOD,FI1,H,NCMN
   100 FORMAT(4X,'TETA=',F3.0,4X,'R=',F4.2,10X,'FIO=',F5.2,10X,'FI1=',
      1F6.1,6X,'H=',F4.1,20X,'NCMN=',F9.2)
       IF(RM2+0.2-RM2*COS(TEM2*PI/180)-H) 30,11,11
    11 CONTINUE
    30 WRITE(3,105)
   105 FORMAT(1H0)
    23 CONTINUE
       CALL EXIT
       END

FEATURES SUPPORTED
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR ORIN
 COMMON       0  VARIABLES      82  PROGRAM     746

END OF COMPILATION

// XEQ
```

```
PAGE   1    OBIN

// JOB                                                    OBIN

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
   0000        0002        0002        0000

V2 M08   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*      NAME OBIN
*      IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER)
*      LIST SOURCE PROGRAM

C      PROGRAMME & CERCLE DE GLISSEMENT  BICOUCHE C1=0 ,C2=0
       REAL NG,NGAMA,L,LG
       ARCOS(X)=ATAN(SQRT(1-X*X)/X)
       PI=3.14159

C      DONNEES
       DO 24 IFI=1,4
       FI2=FLOAT(IFI)*10
       CALL SCALF (1.35,0.067,8.1,0.)
       CALL FGRID (0,0.,0.,0.2,35)
       CALL FGRID (1,0.,0.,10.,10)
       CALL FCHAR (-0.2,70.,0.2,0.2,1.57)
       WRITE (7,100)
  100  FORMAT(8H N GAMMA)
       CALL FCHAR(7.2,-5.,0.2,0.2,1.57)
       WRITE (7,101) FI2
  101  FORMAT('H',4X,'FI2=',F5.2)
       CALL FPLOT (1,0.,0.)
       WRITE (3,105) FI2
  105  FORMAT(50X,'FI2=',F4.1,///)

C      INCREMENTATION DE FI1 ET DE H
       DO 23 M=1,4
       FI1=FLOAT(M)*10
       DO 11 K=1,71,2
       H=FLOAT(K-1)/10

C      RECHERCHE D'UN MINIMUM
       NGAMA=10000.
       TEM=0.
       RM=0.
       FIOM=0.
       DO 10 J=14,62,3
       R=FLOAT(J)/10
       DO 10 I=26,90,4
       RI=FLOAT(I)
       TETA=RI*PI/180

C      TEST SUR L'ABSCISSE DU CERCLE
       L=R*SIN(TETA)-1
       IF(L) 10,10,1

C      CALCUL DE NGAMMA
```

PAGE 2 OBIN

```
     1 X=COS(TETA)+H/R
       IF(X-1) 19,20,20
    19 PSI=ARCOS(X)
       GOTO 21
    20 PSI=0.
    21 FI1R=FI1*PI/180
       FI2R=FI2*PI/180
       FIO=FI1R+PSI*(FI2R-FI1R)/TETA
       LG=R*SIN(FIO)-L
       IF(LG) 2,10,10
     2 NG=R**3*SIN(FIO)*(SIN(2*TETA)/2-TETA)/2/LG
       IF(NG-NGAMA) 5,10,10
     5 NGAMA=NG
       TEM=PSI
       RM=R
       FIOM=FIO
       FIOD=FIOM*180/PI
    10 CONTINUE

       CALL FPLOT (-2,H,NGAMA)
       WRITE (3,102) TEM,RM,FIOD,FI1,H,NGAMA
   102 FORMAT(6X,'TEM=',F3.0,6X,'RM=',F5.2,10X,'FIO=',F5.2,10X,'FI1=',
      1F4.1,6X,'H=',F4.1,16X,'NGAMMA=',F6.2)
       IF(RM+0.2-RM*COS(TEM*PI/180)-H) 30,11,11
    11 CONTINUE
    30 CALL FPLOT (1,0.,0.)
       WRITE (3,103)
   103 FORMAT(1H0)
    23 CONTINUE
       WRITE (3,104)
   104 FORMAT(1H1)
    24 CONTINUE
       CALL EXIT
       END
```

FEATURES SUPPORTED
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR OBIN
 COMMON 0 VARIABLES 62 PROGRAM 644

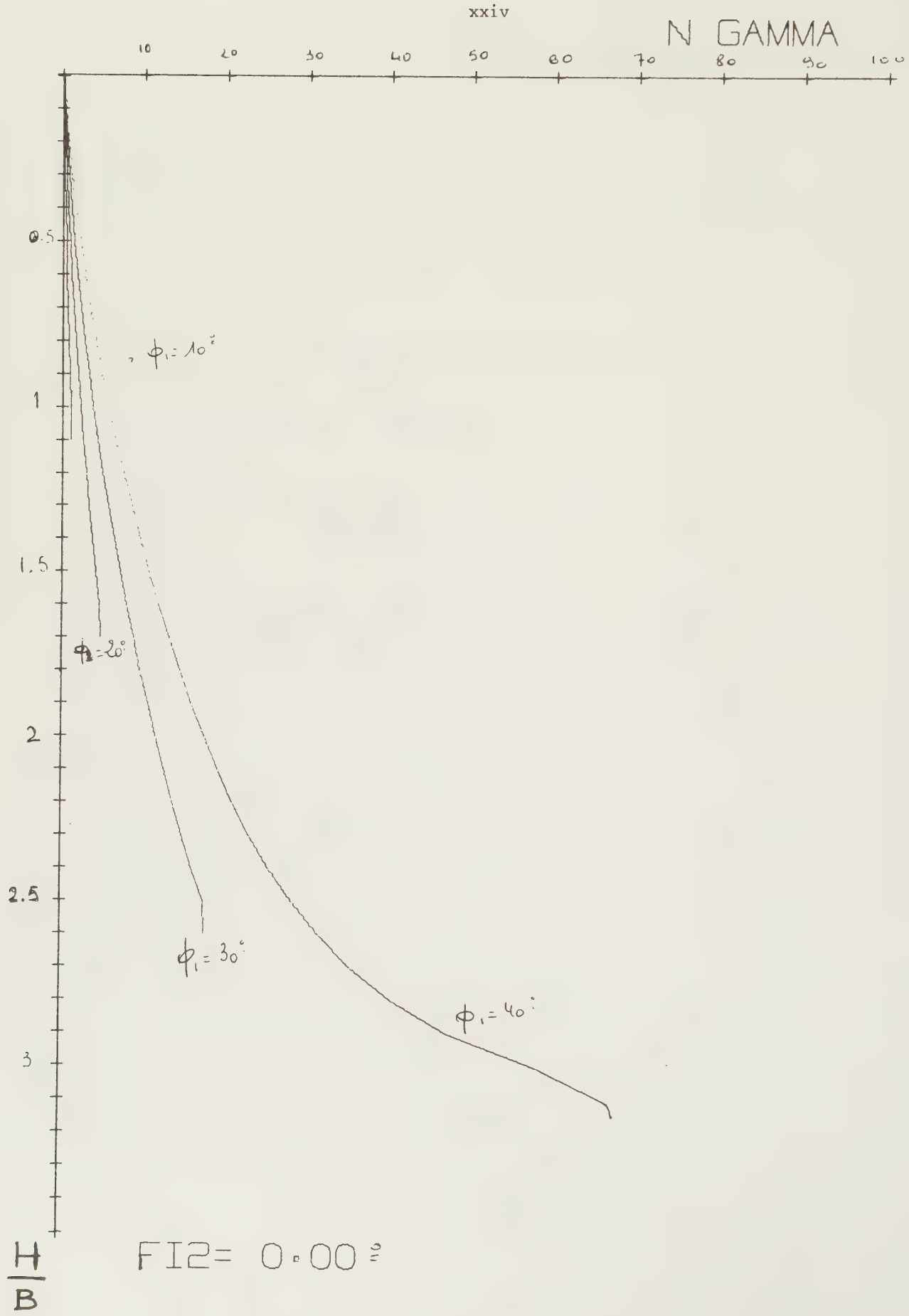
```
PAGE   1    OBIN

// JOB                                                    OBIN

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0001        0001        0000

V2 M09   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*      NAME OBIN
*      IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER)
*      LIST SOURCE PROGRAM

C      PROGRAMME A CERCLE DE GLISSEMENT BICOUCHE   NAPPE
       REAL L ,LAMDA ,MC ,NC2,NCMN,NC
       DIMENSION GAM(10)
       ARCOS(X)=ATAN(SQRT(1-X*X)/X)
       PI=3.14159
       READ(2,102) (GAM(N),N=1,3)
   102 FORMAT(4(F8.3))

C      DONNEES
       DO23 N=1,3
       WRITE(3,101)    GAM(N)
   101 FORMAT(1H1,40X,'C/GAMMA*B=',F8.3,///)

C      INCREMENTATION DE FI1 ET DE H
       DO 23 M=1,5
       FI1=FLOAT(M-1)*10.
       DO 11 K=1,11
       RK=FLOAT(K-1)
       IF(RK-5) 7,7,8
     7 H=RK*2/10
       GO TO 9
     8 H=1+(RK-5)/2

C      RECHERCHE D'UN MINIMUM POUR NC
     9 NCMN=10000.
       TEM2=0.
       RM2=0.
       DO 10 J=7,31,2
       R=FLOAT(J)/10
       DO 10 I=30,102,4
       RI=FLOAT(I)
       TETA=RI*PI/180

C      TEST SUR L'ABSCISSE DU CERCLE
       L=R*SIN(TETA)-0.5
       IF(L) 10,10,1

C      CALCUL DE ABC
     1 X=COS(TETA)+H/R
       IF(X-1) 19,20,20
    19 PSI=ARCOS(X)
       GOTO 21
    20 PSI=0.
```

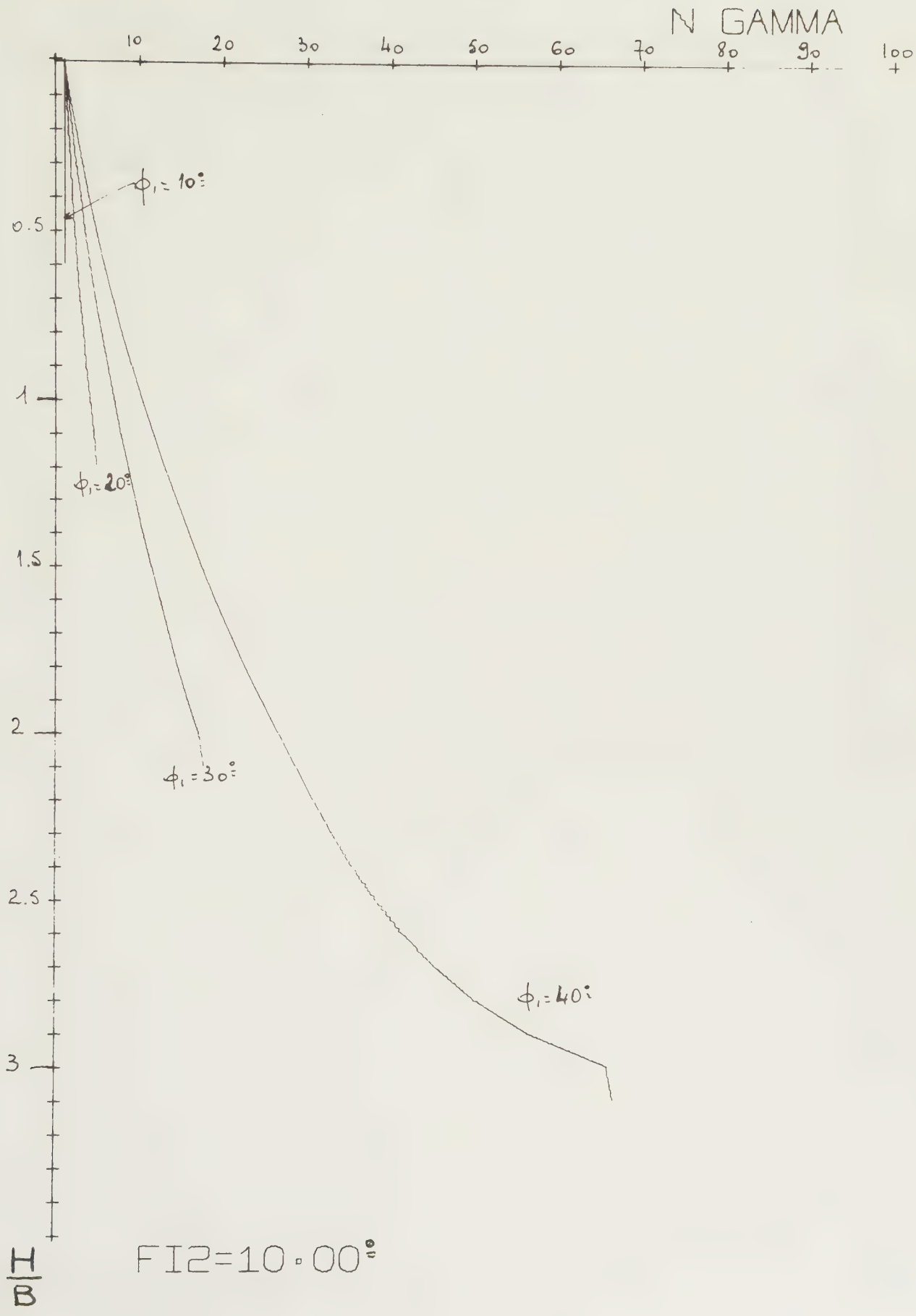
```
PAGE   2     OBIN

    21 FI1R=FI1*PI/180
       LAMDA=R*SIN(FI1R)
       W1=2*R*R*(TETA-SIN(2*TETA)/2-PSI+SIN(2*PSI)/2)
       W2=3.4/2.7*R*R*(PSI-SIN(2*PSI)/2)
       W=W1+W2
       MC=4*TETA*R*R*GAM(N)
       RC=4*SIN(TETA)*R*GAM(N)
       A4=LAMDA**2-L**2
       B4=LAMDA**2*W+L*MC
       C4=(RC*LAMDA)**2-MC**2+(W*LAMDA)**2

C      CALCUL DES RACINES NC1 NC2
       DELTA=B4**2-A4*C4
       IF(ABS(DELTA)-0.0001) 13,13,14
    13 NC=-B4/A4
       IF(NC) 10,17,17
    17 IF(NC      -NCMN) 18,10,10
    18 NCMN=NC
       TEM2=RI
       RM2=R
       GOTO 10
    14 IF(DELTA) 10,10,4
     4 NC2=(-B4-SQRT(DELTA))/A4
       IF(NC2) 10,12,12
    12 IF(NC2      -NCMN) 5,10,10
     5 NCMN=NC2
       TEM2=RI
       RM2=R
    10 CONTINUE
C       FIN DE LA RERCHERCHE D'UN MINIMUM

       WRITE(3,100) TEM2,RM2,      FI1,H,NCMN
   100 FORMAT(4X,'TETA=',F3.0,4X,'R=',F4.2,20X,                    'FI1=',
      1F6.1,6X,'H=',F4.1,20X,'NCMN=',F9.2)
       IF(RM2+0.2-RM2*COS(TEM2*PI/180)-H) 30,11,11
    11 CONTINUE
    30 WRITE(3,105)
   105 FORMAT(1H0)
    23 CONTINUE
       CALL EXIT
       END

FEATURES SUPPORTED
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR OBIN
 COMMON       0  VARIABLES     98  PROGRAM     760

END OF COMPILATION

// XEQ
```

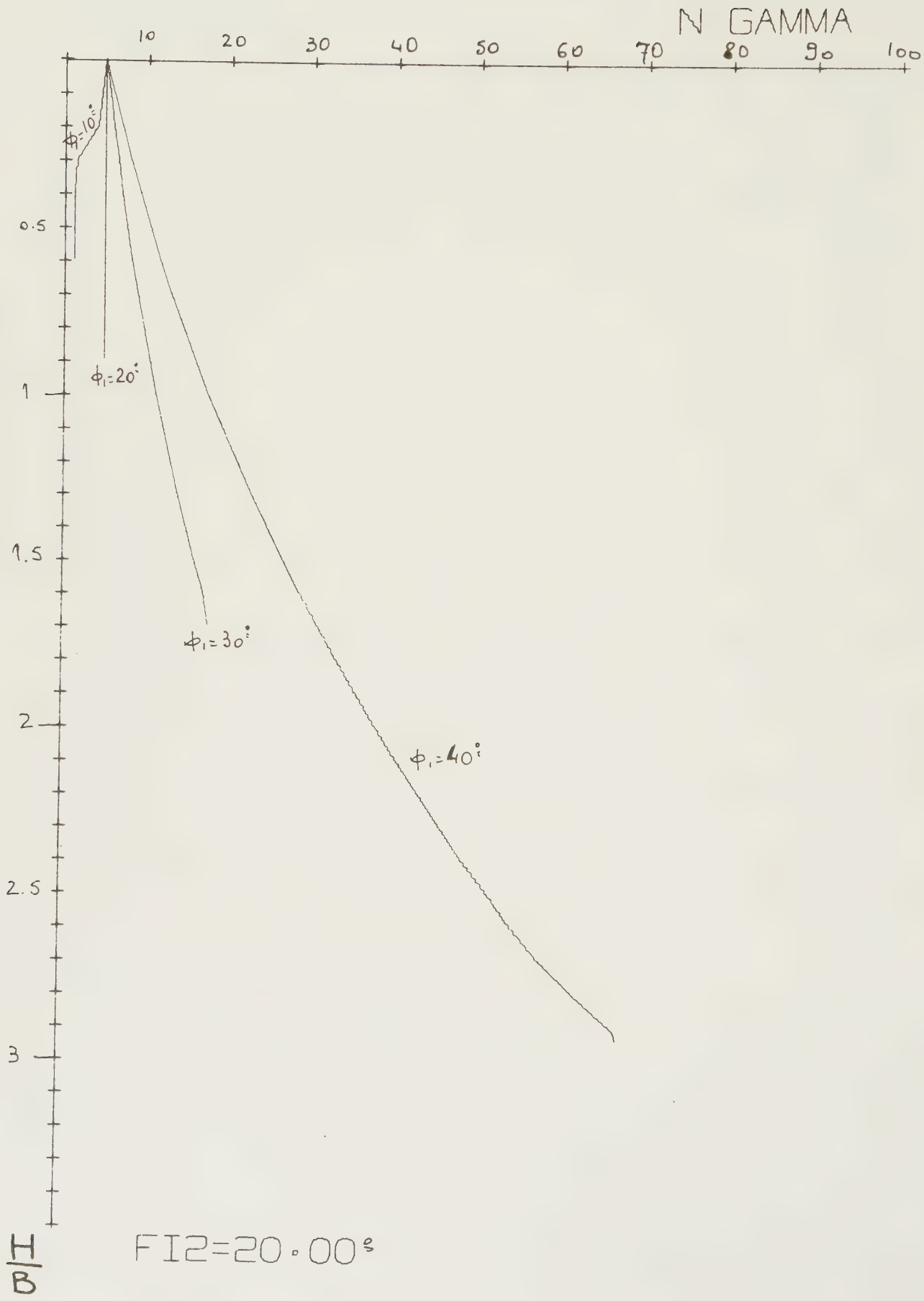
A1.8 EXEMPLES D'ABAQUES

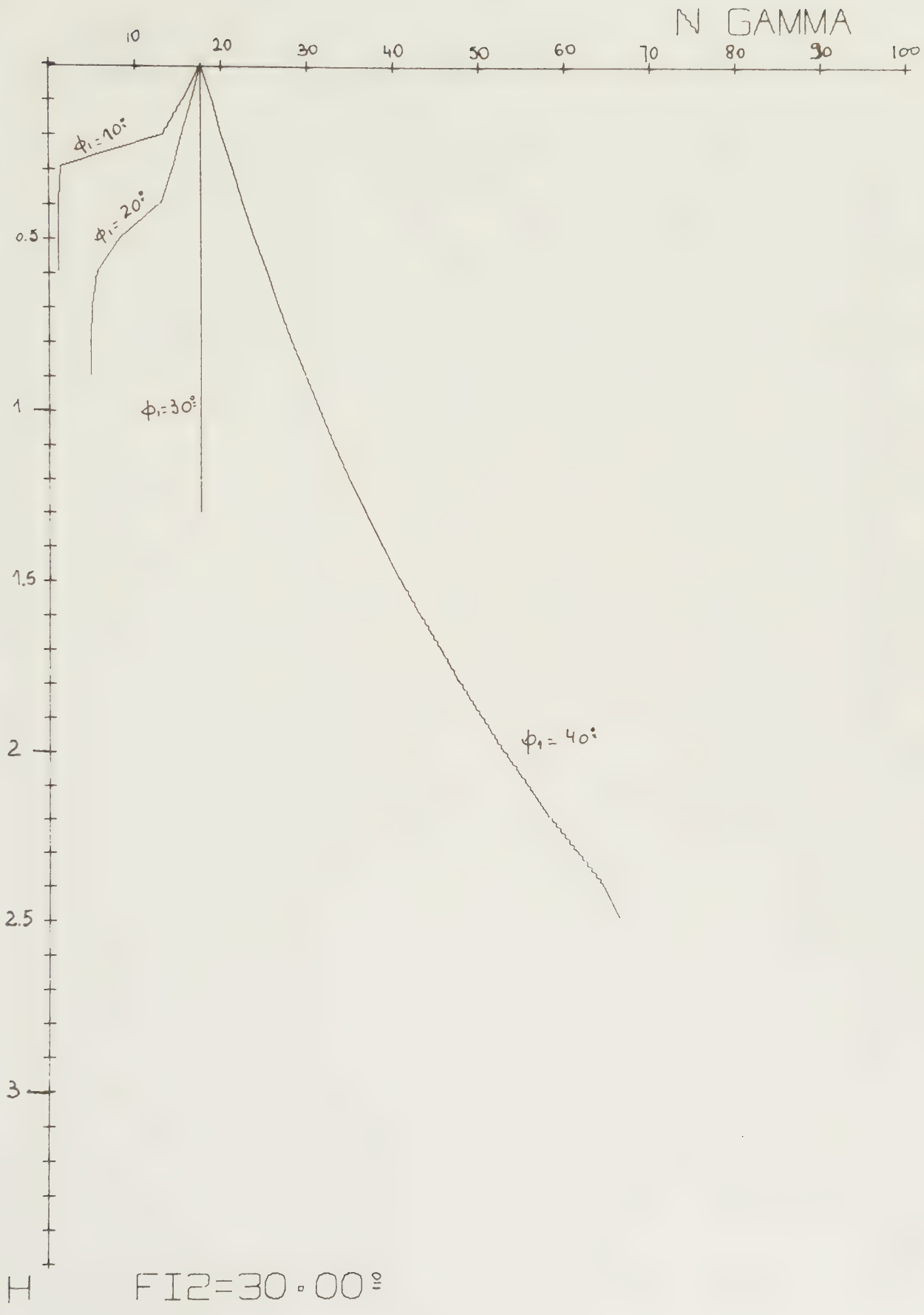
Exemples d'abaques N_{γ} en fonction de $\frac{H}{B}$ $\left(\text{pour } c_1 = c_2 = 0\right)$.

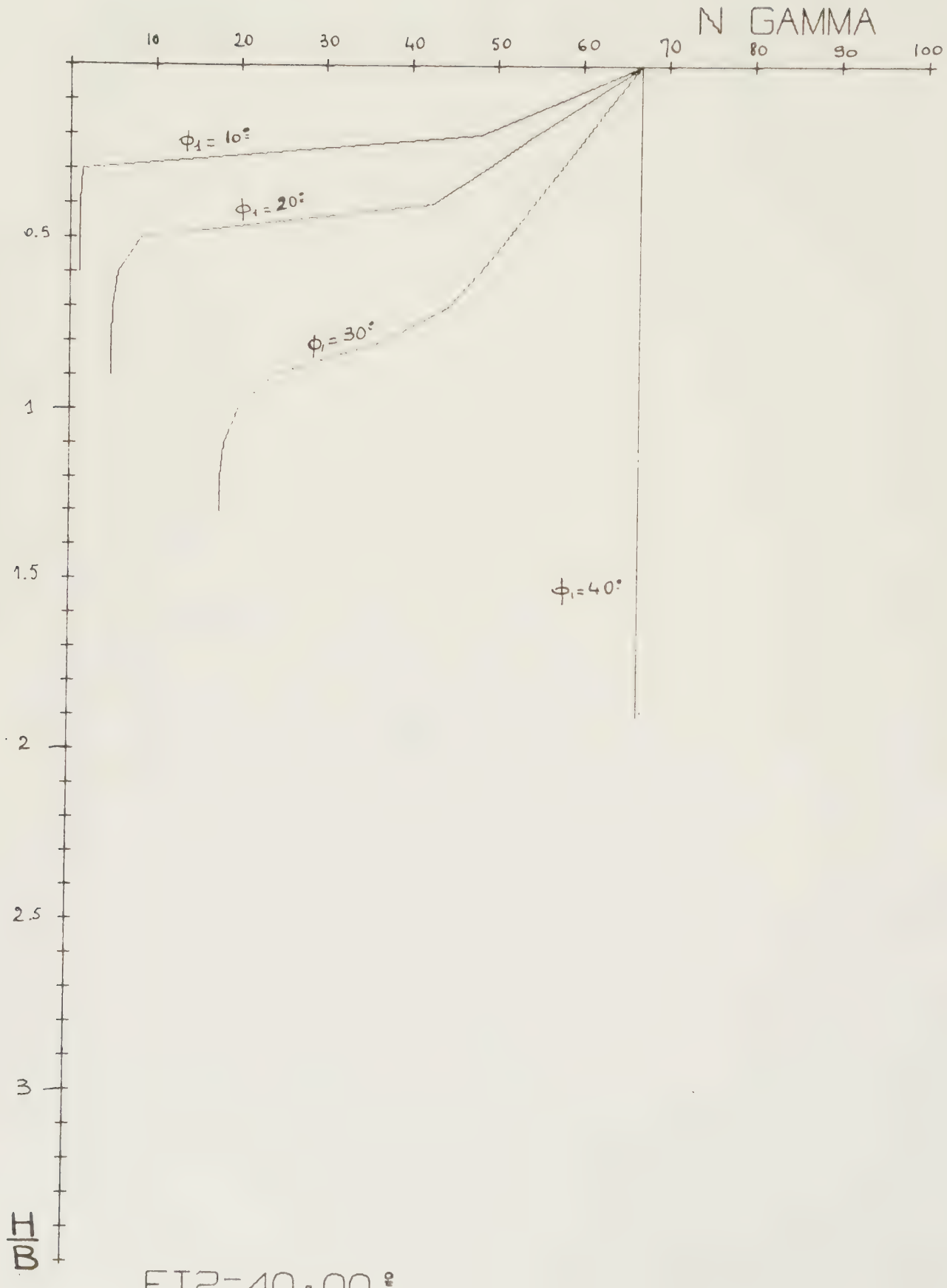
Courbes tracées en coordonnées métriques et non plus semi-logarithmiques par la traceuse de l'ordinateur IBM 1132.


N GAMMA
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$\phi_1 = 10^\circ$
$\phi_1 = 20^\circ$
$\phi_1 = 30^\circ$
$\phi_1 = 40^\circ$
H/B
FI2= 0.00°


N GAMMA
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
$\phi_1 = 10°$
$\phi_1 = 20°$
$\phi_1 = 30°$
$\phi_1 = 40°$
0.5
1
1.5
2
2.5
3
H/B
FI2=10.00°


N GAMMA
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
0.5
1
1.5
2
2.5
3
ϕ_1=10°
ϕ_1=20°
ϕ_1=30°
ϕ_1=40°
H/B
FI2=20.00°

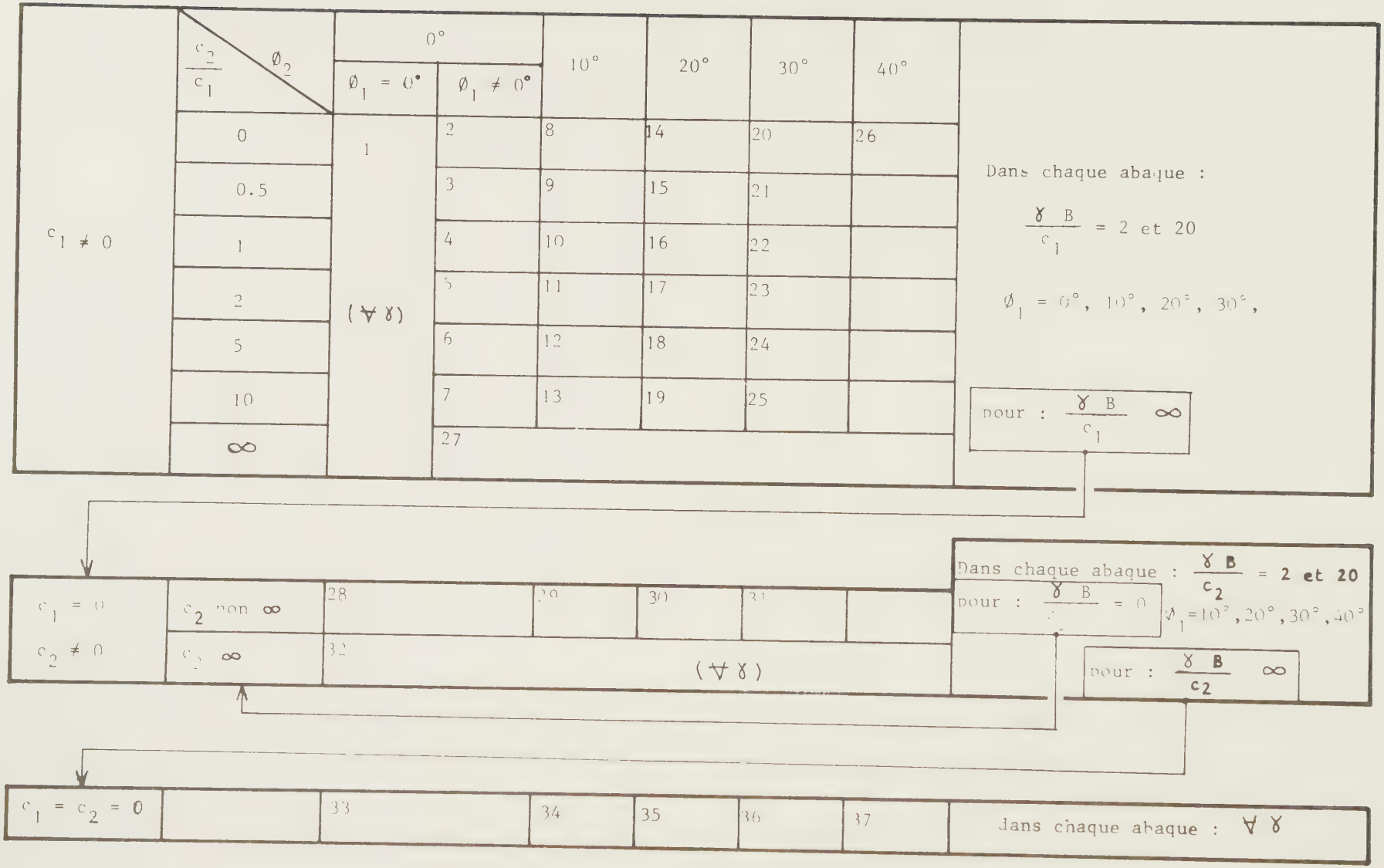

N GAMMA
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
$\phi_1 = 10°$
$\phi_1 = 20°$
$\phi_1 = 30°$
$\phi_1 = 40°$
0.5
1
1.5
2
2.5
3
H
FI2=30.00°


N GAMMA
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
$\phi_1 = 10°$
$\phi_1 = 20°$
$\phi_1 = 30°$
$\phi_1 = 40°$
0.5
1
1.5
2
2.5
3
H/B

FI2=40.00°

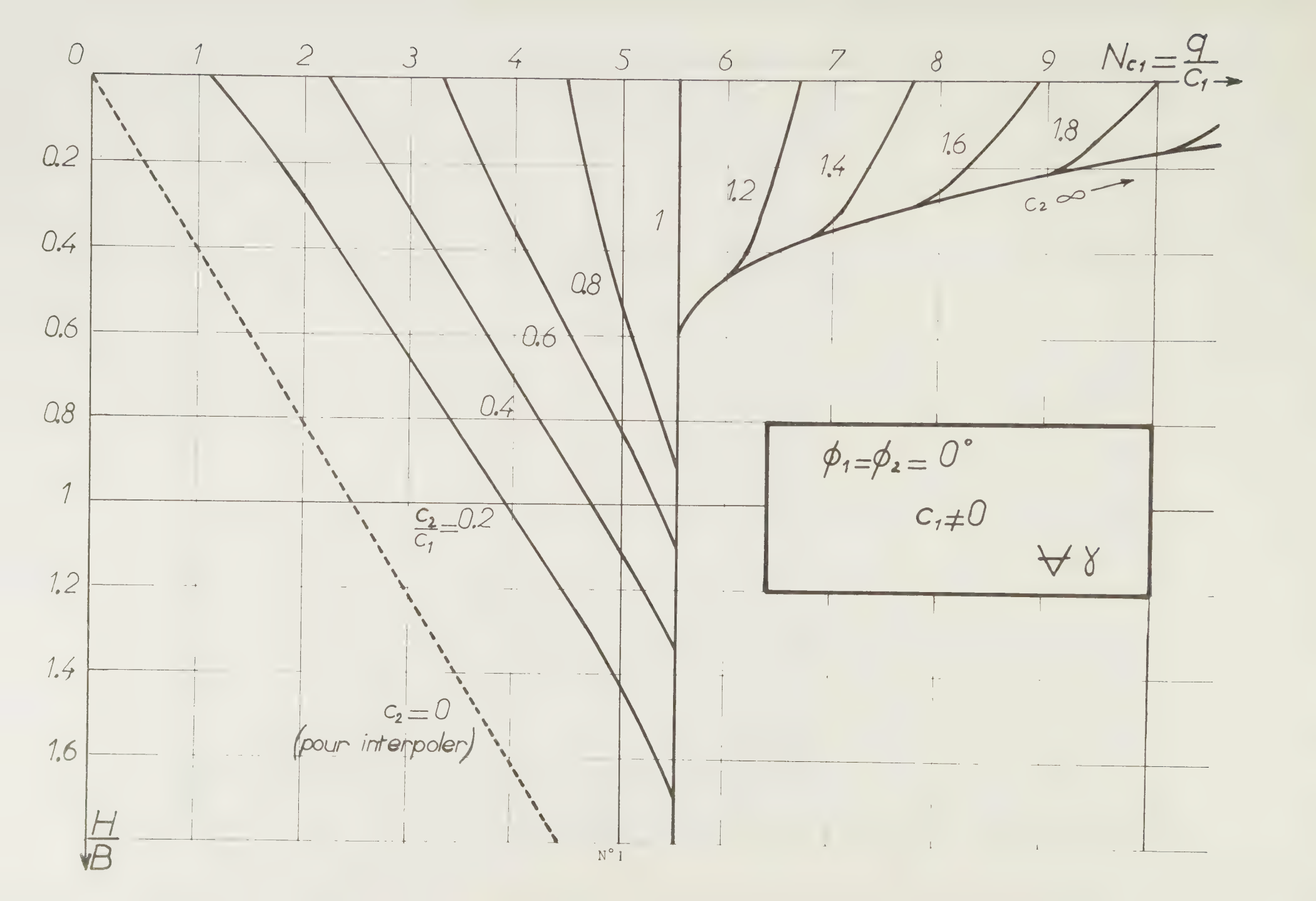
A N N E X E II

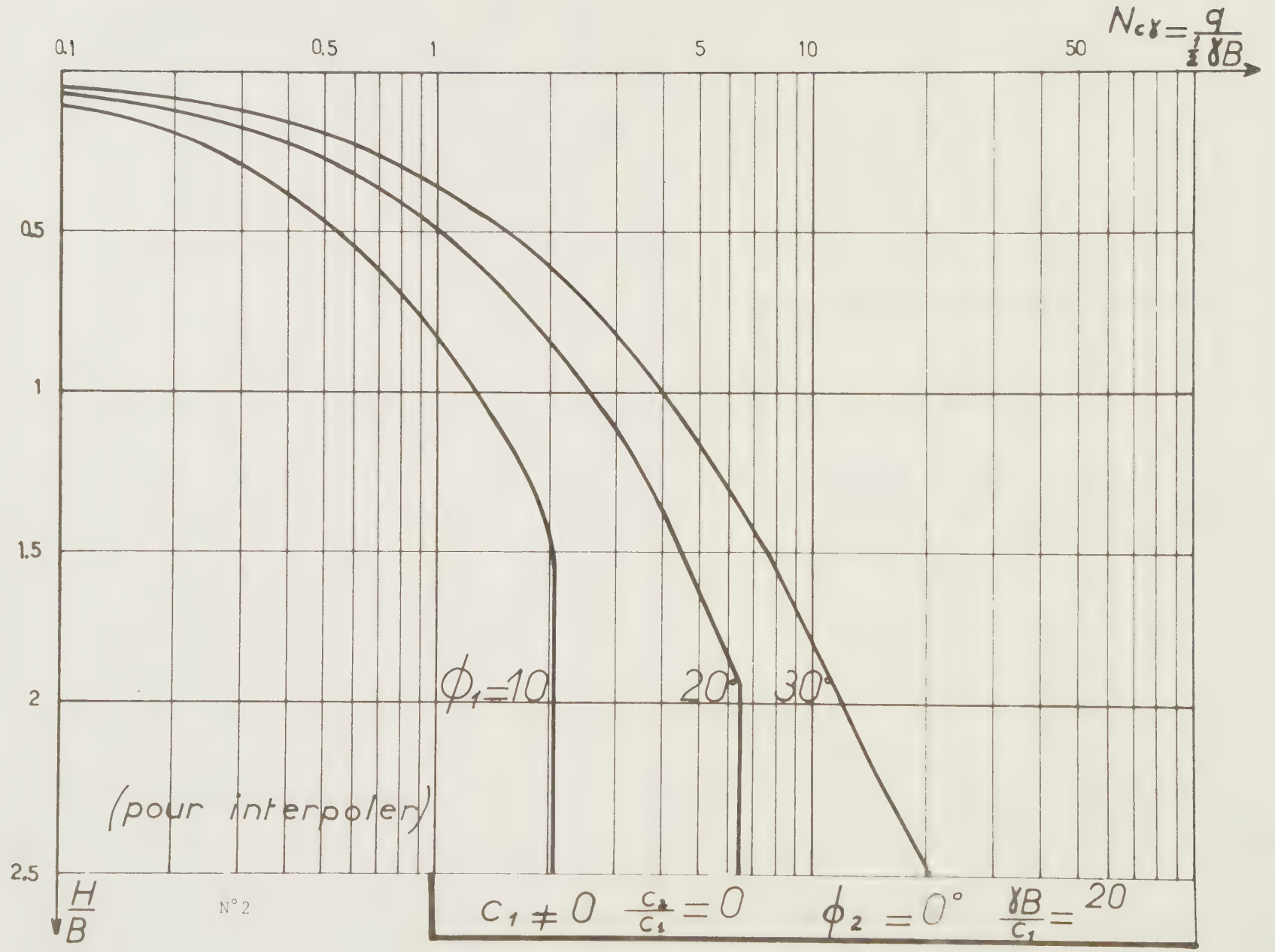
NOUS PRESENTONS ICI LES RESULTATS OBTENUS DANS LE CHAPITRE II
POUR LE CALCUL DE LA FORCE PORTANTE LIMITE D'UN SOL DE FONDATION BI-COUCHE
PAR LA METHODE DU CERCLE DE GLISSEMENT.

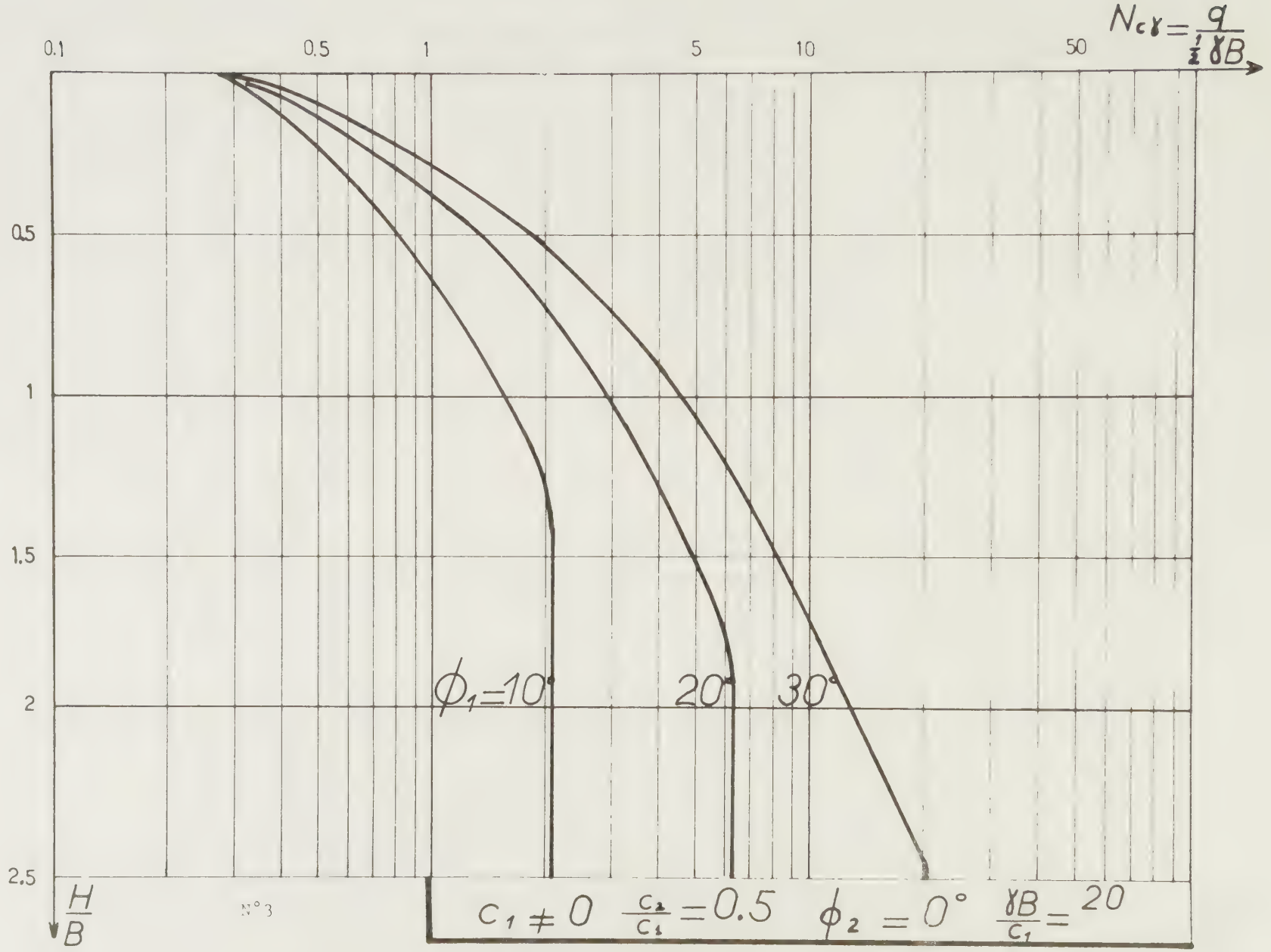

$c_1 \neq 0$
$\frac{c_2}{c_1}$ ϕ_2
0°
$\phi_1 = 0°$
$\phi_1 \neq 0°$
10°
20°
30°
40°
0
0.5
1
2
5
10
∞
1
(∀ γ)
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
Dans chaque abaque :
$\frac{\gamma B}{c_1}$ = 2 et 20
ϕ_1 = 0°, 10°, 20°, 30°,
pour : $\frac{\gamma B}{c_1}$ ∞
$c_1 = 0$
$c_2 \neq 0$
c_2 non ∞
c_2 ∞
28
29
30
31
32
(∀ γ)
Dans chaque abaque : $\frac{\gamma B}{c_2}$ = 2 et 20
pour : $\frac{\gamma B}{c_2}$ = 0
ϕ_1 = 10°, 20°, 30°, 40°
pour : $\frac{\gamma B}{c_2}$ ∞
$c_1 = c_2 = 0$
33
34
35
36
37
dans chaque abaque : ∀ γ

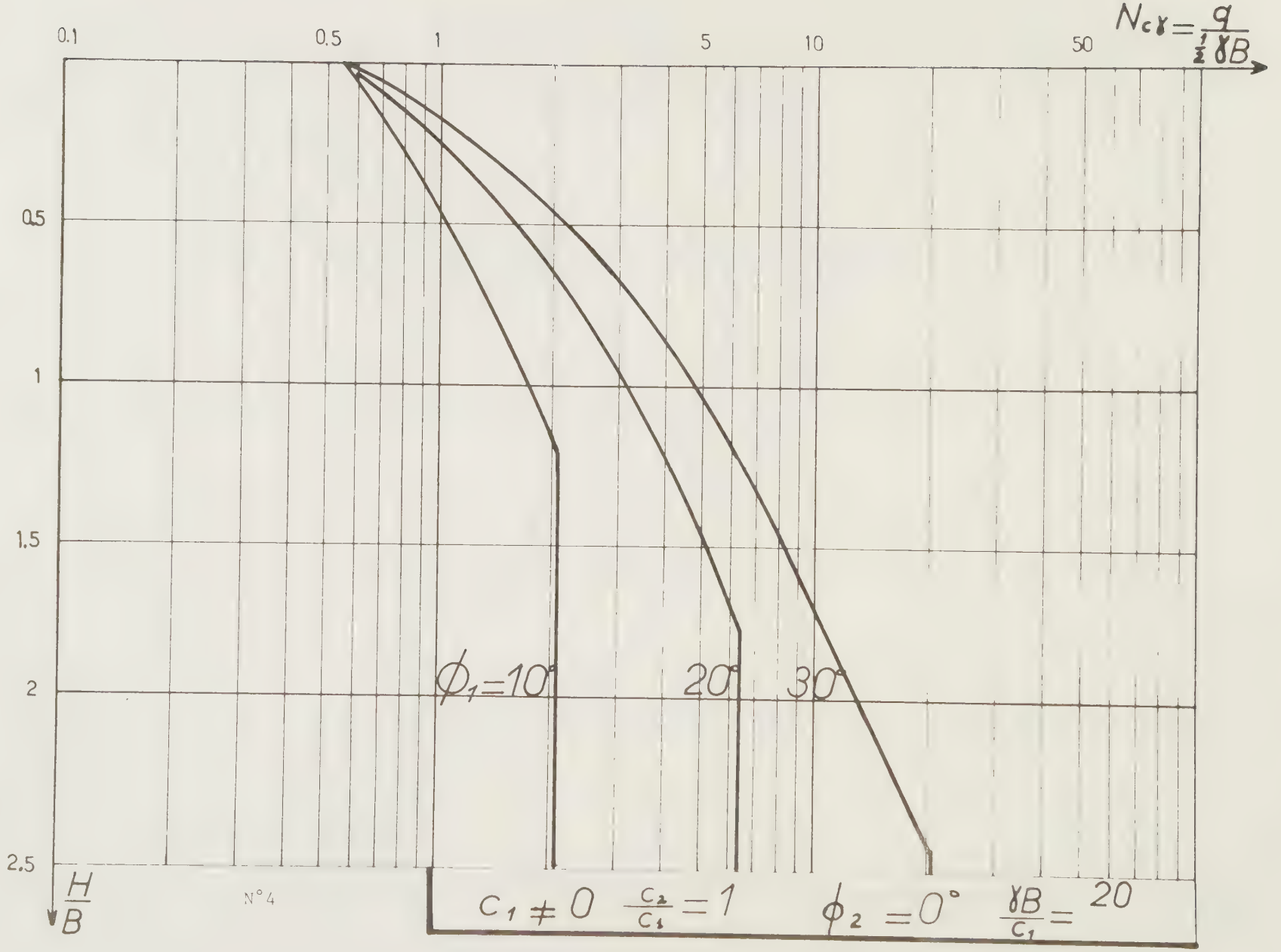
$$c_1 \neq 0$$

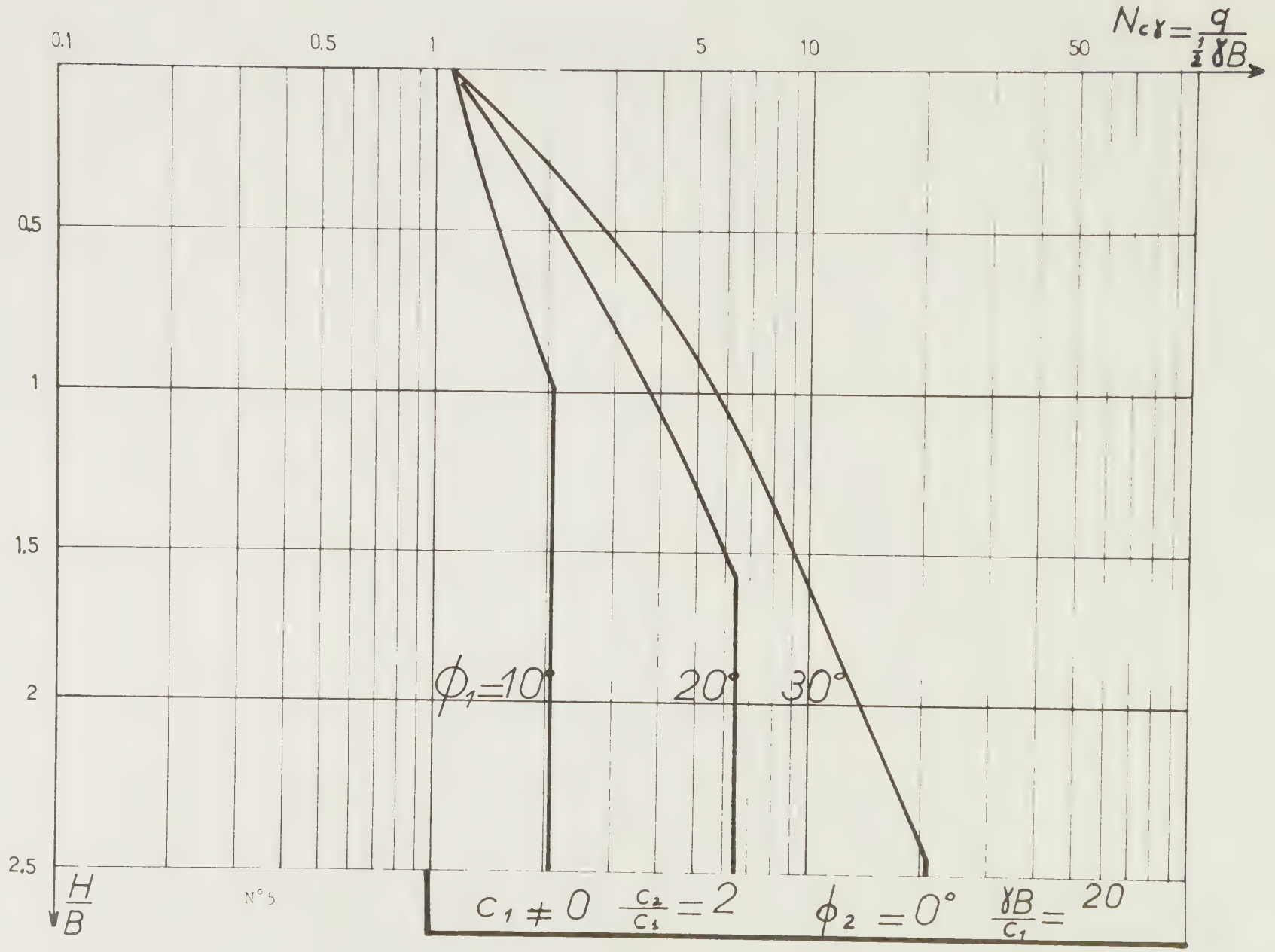
$$\phi_2 = 0^\circ$$

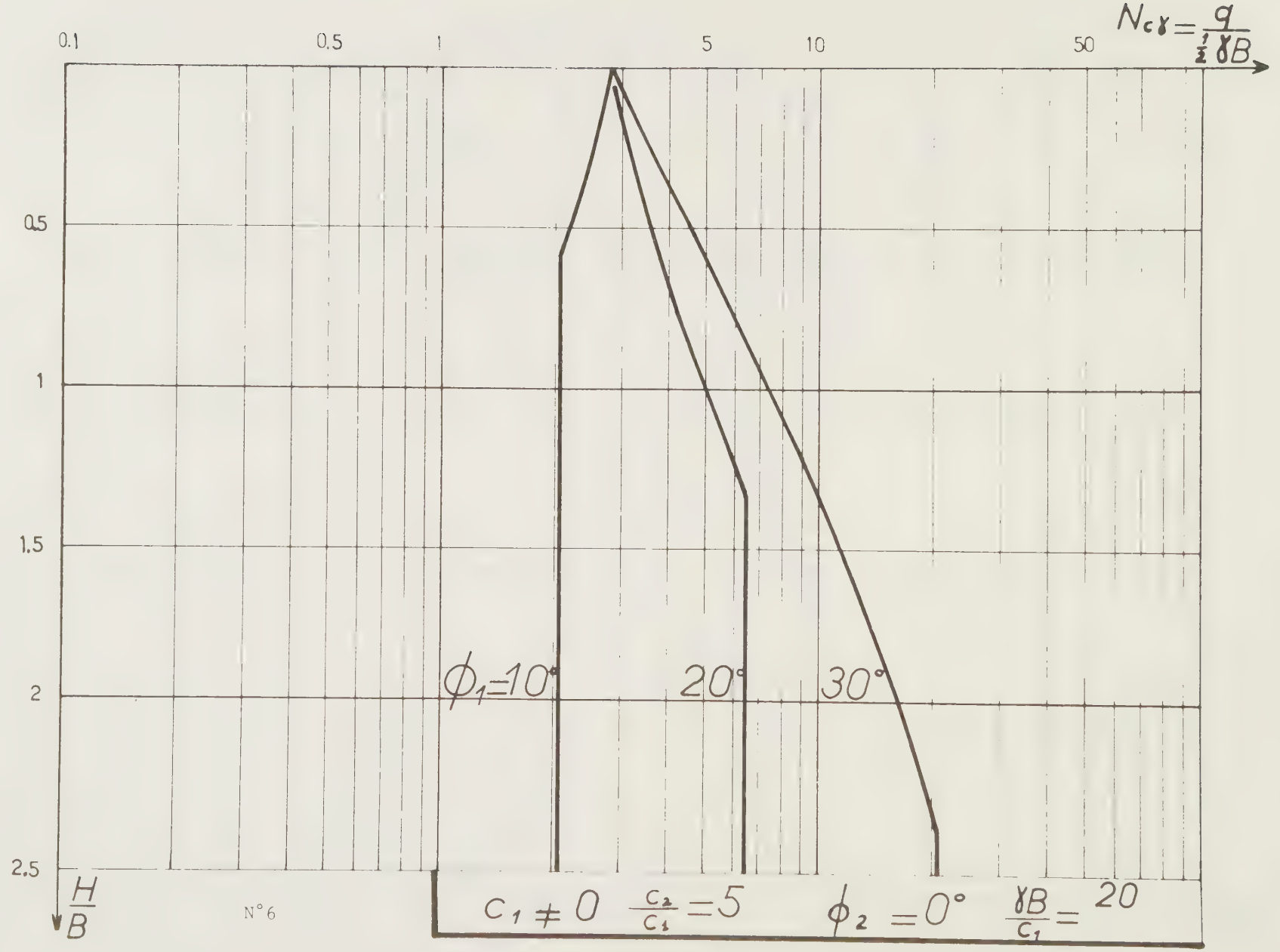

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
$N_{c1} = \frac{q}{c_1}$
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
$\frac{H}{B}$
0.8
0.6
0.4
1
1.2
1.4
1.6
1.8
$c_2 \infty$
$\frac{c_2}{c_1} = 0.2$
$c_2 = 0$
(pour interpoler)
$\phi_1 = \phi_2 = 0°$
$c_1 \neq 0$
$\forall \gamma$
N° 1

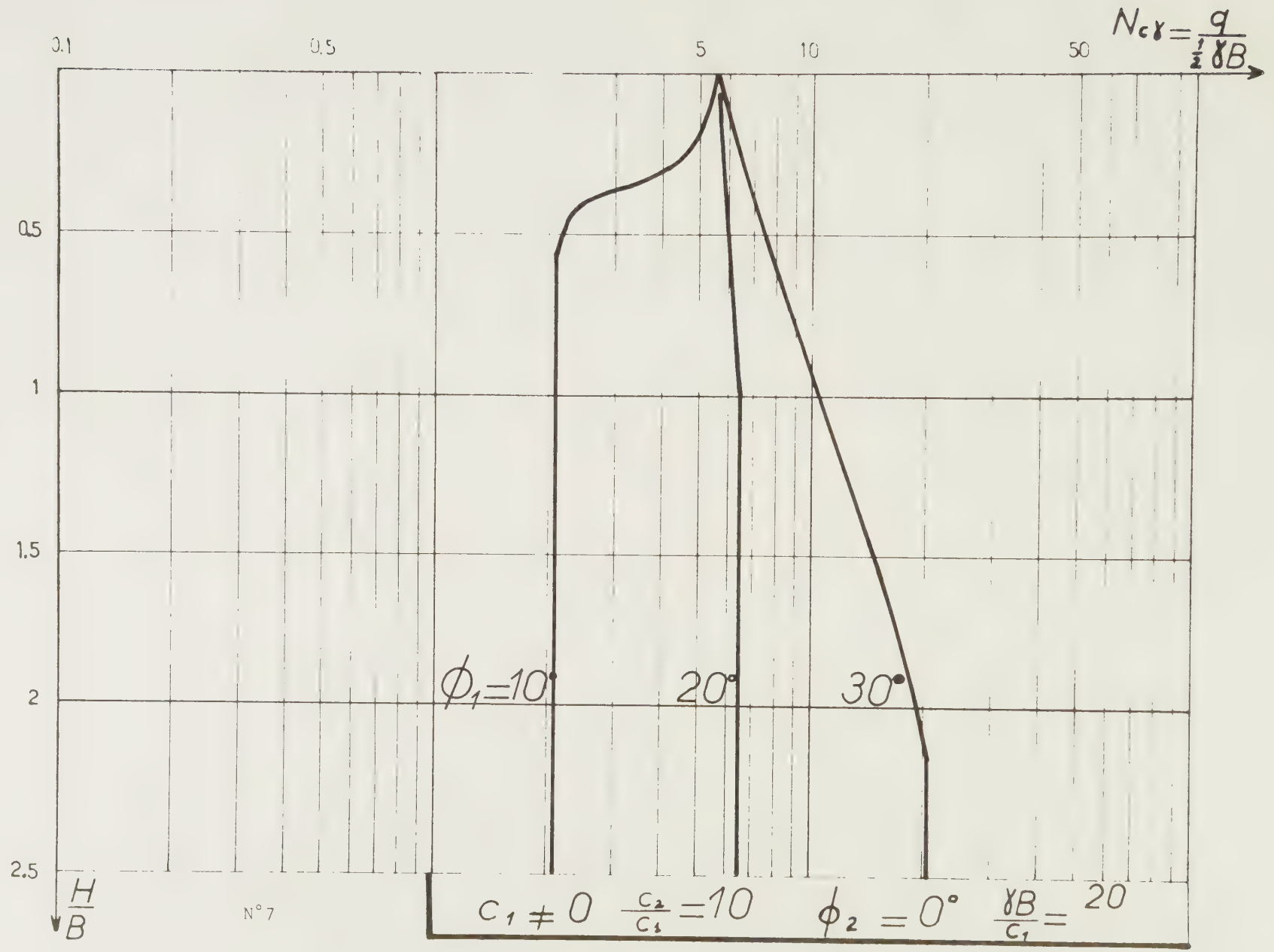

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 10$
20°
30°
(pour interpoler)
$\frac{H}{B}$
N° 2
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0$ $\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°3
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0.5$ $\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
N°4
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 1$ $\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20

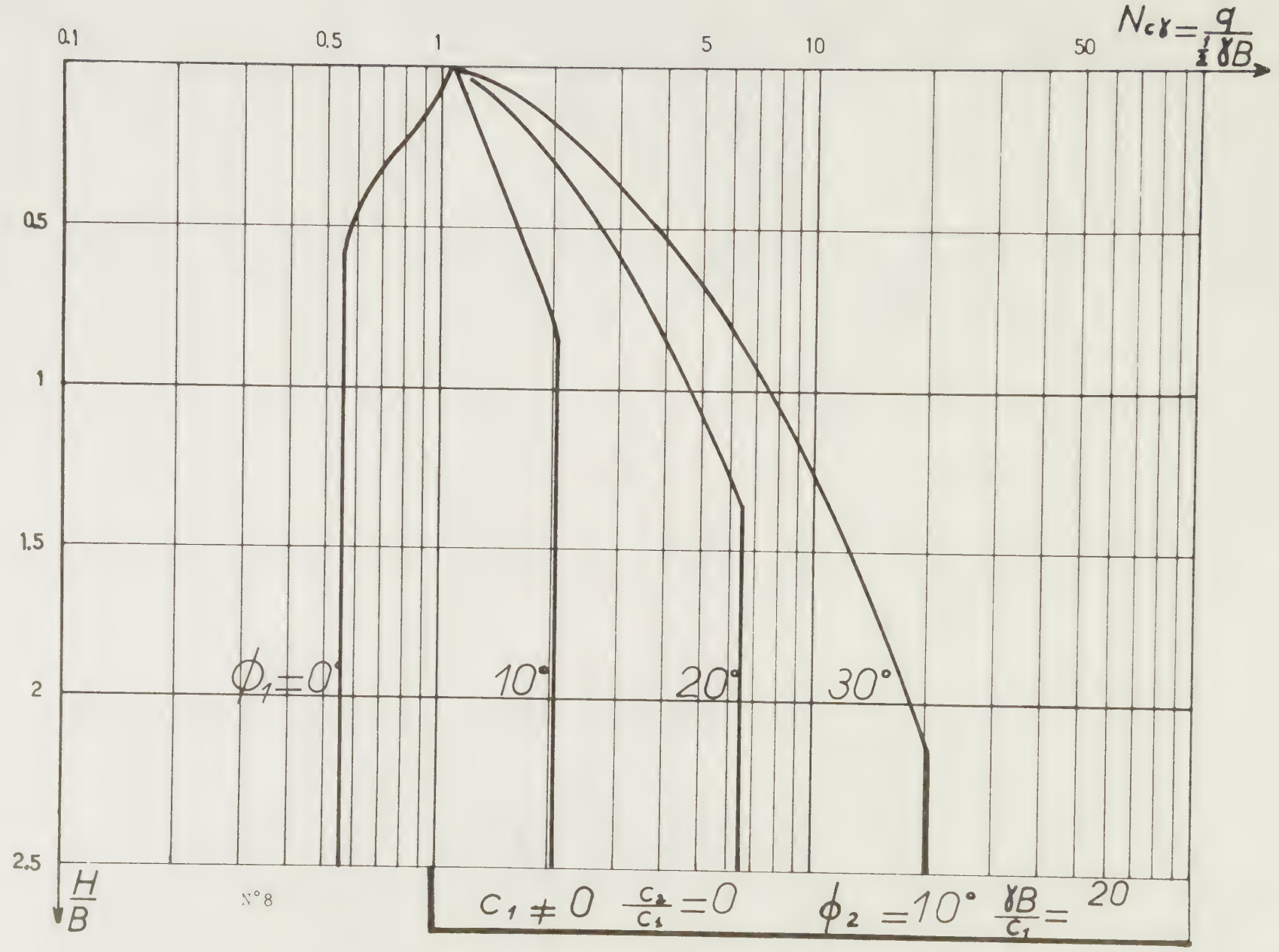

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
N° 5
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 2$ $\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20

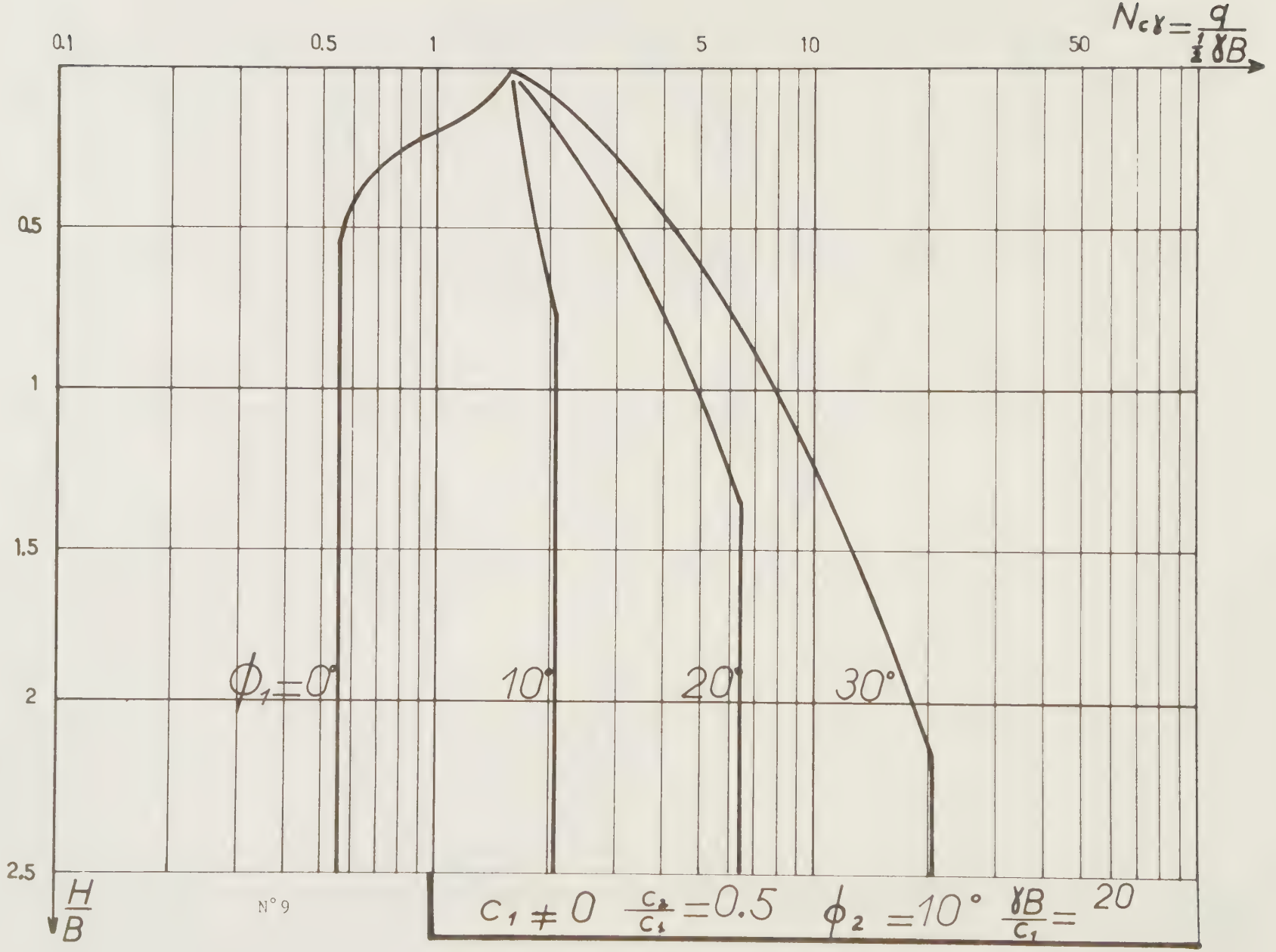

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°6
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 5$ $\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$

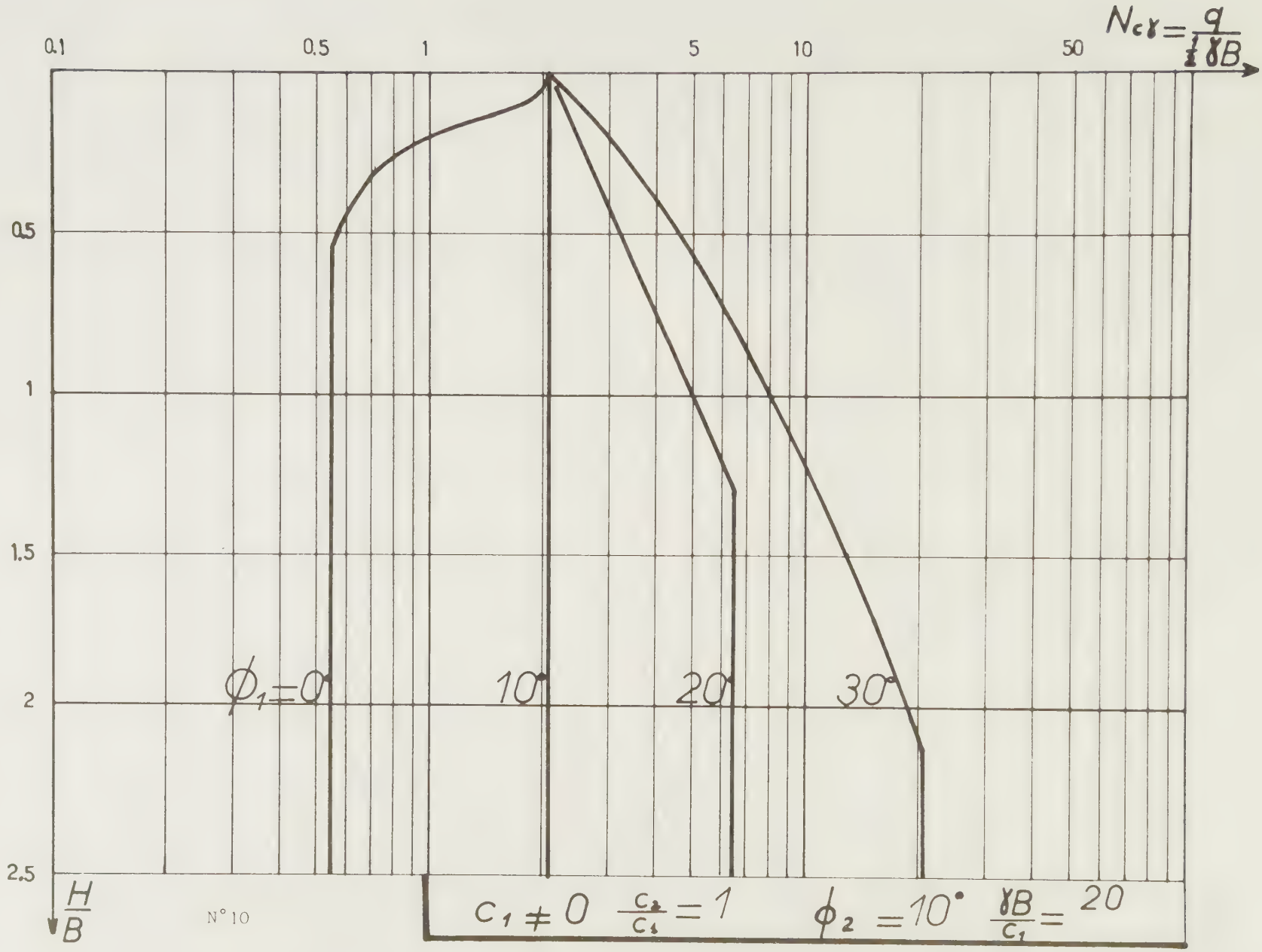

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 10$ $\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$
N°7

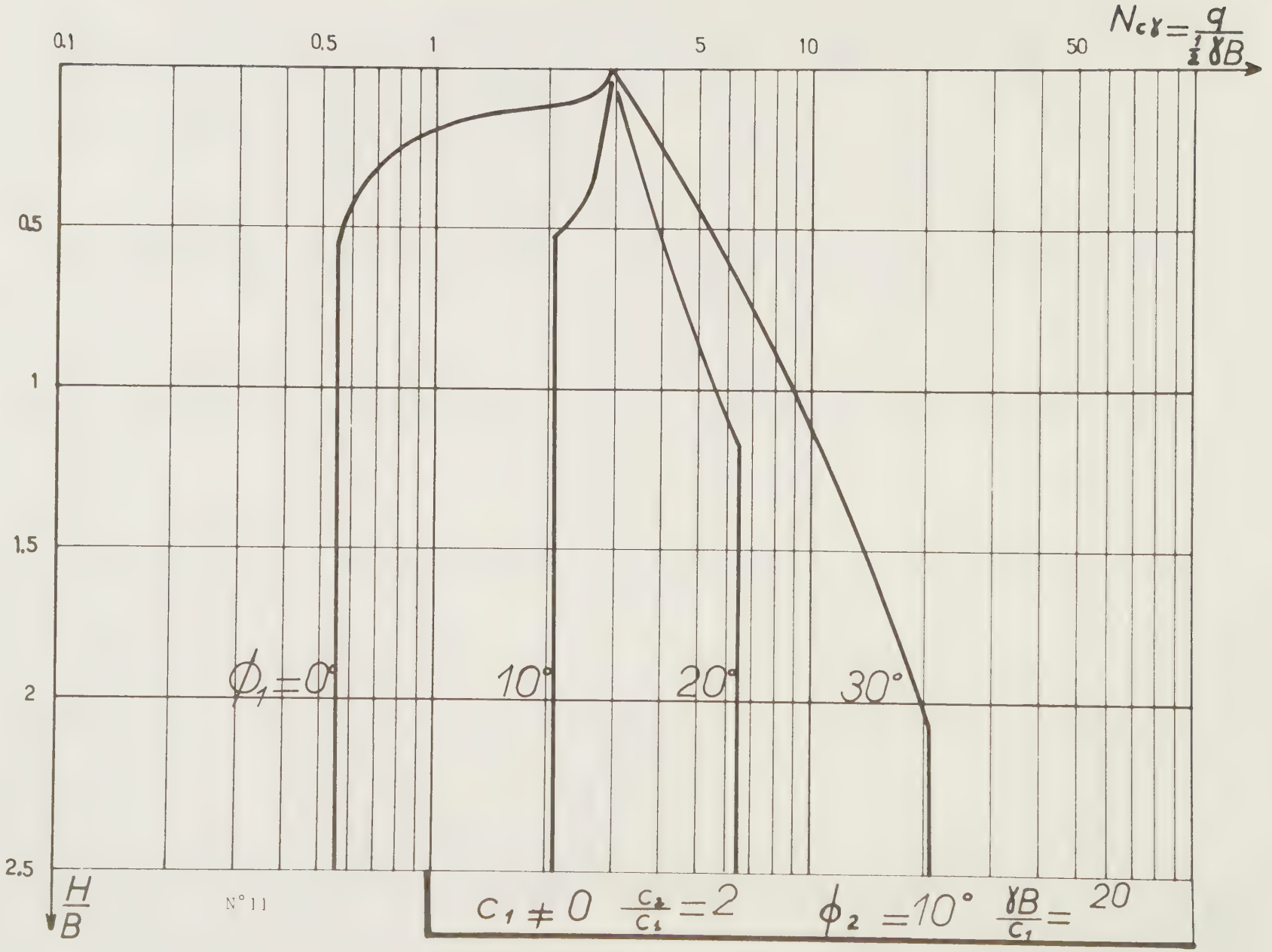
$c_1 \neq 0$

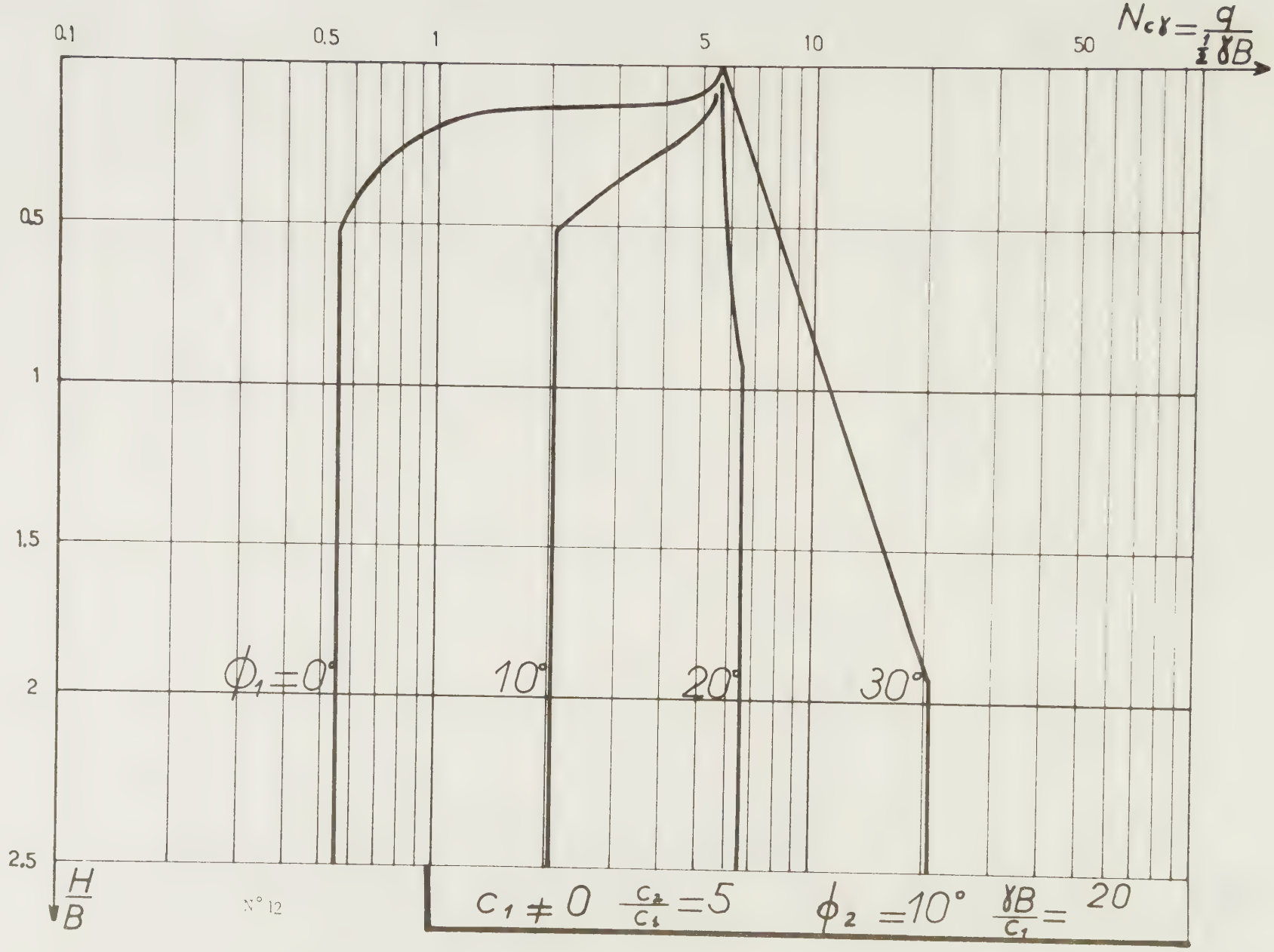
$\phi_2 = 10^\circ$

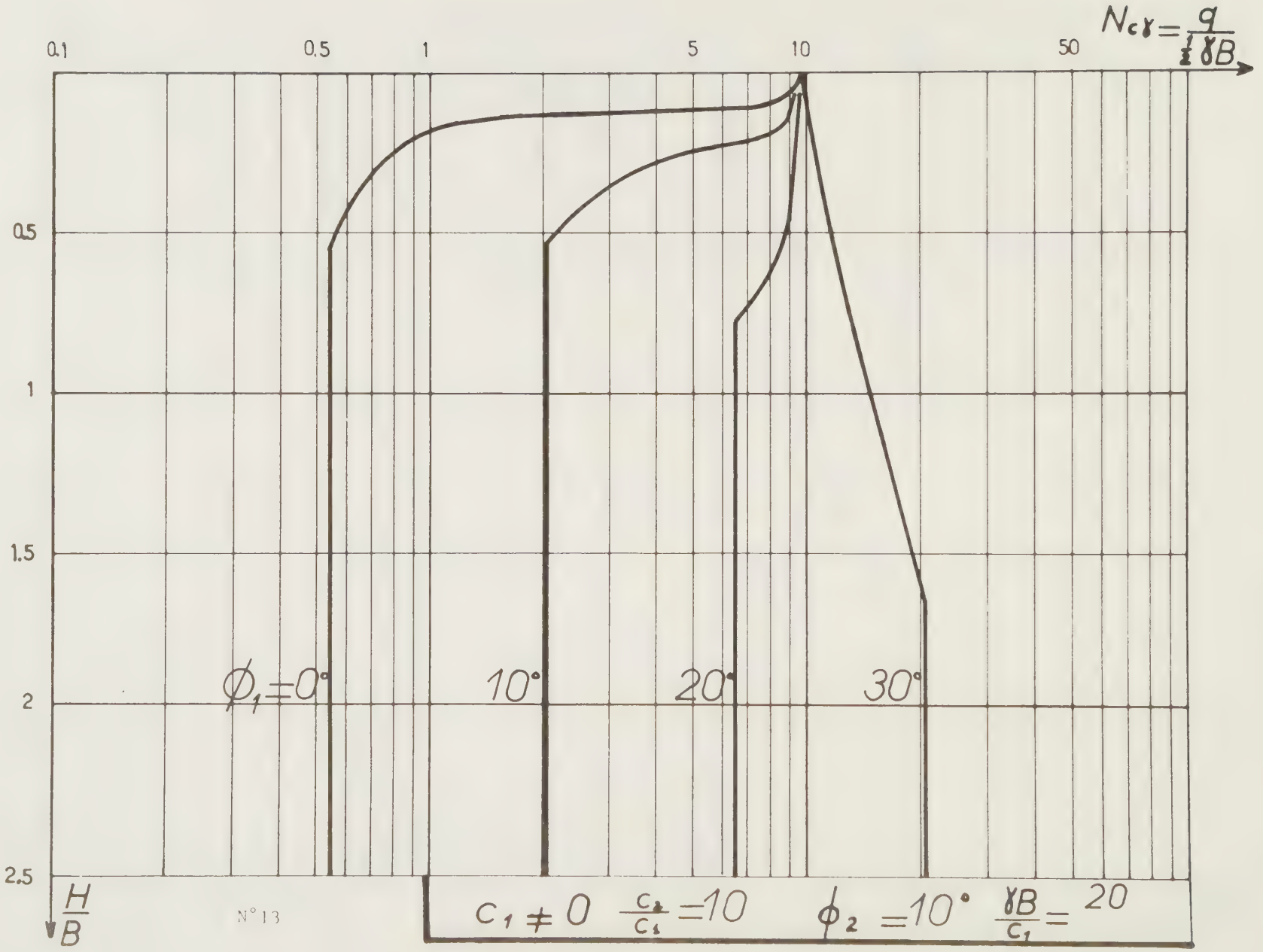

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
N°8
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0$ $\phi_2 = 10°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 9
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0.5$ $\phi_2 = 10°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 10
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 1$ $\phi_2 = 10°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$

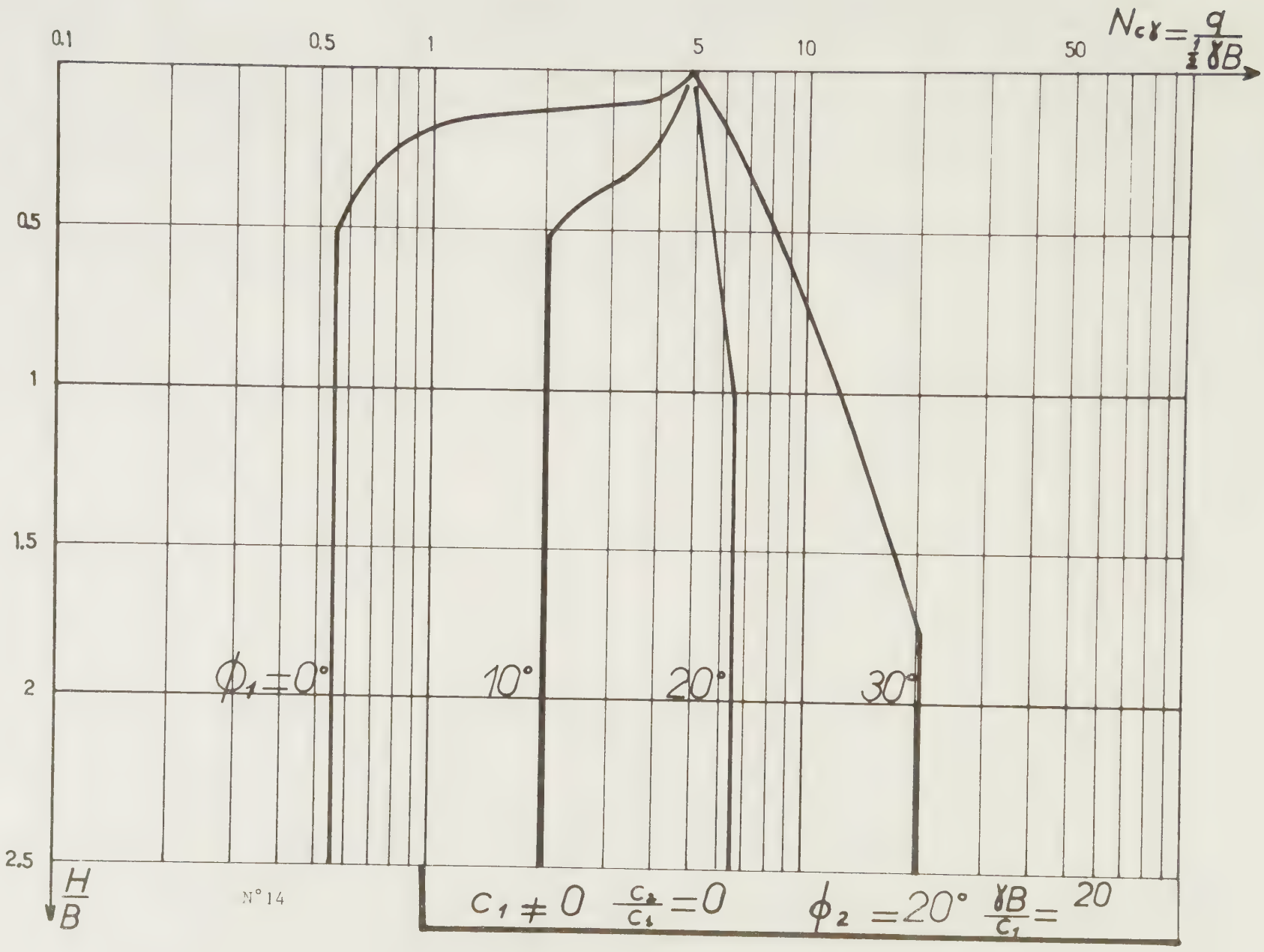

$N_{c\gamma}=\frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1=0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 11
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1}=2$ $\phi_2=10°$ $\frac{\gamma B}{c_1}=20$

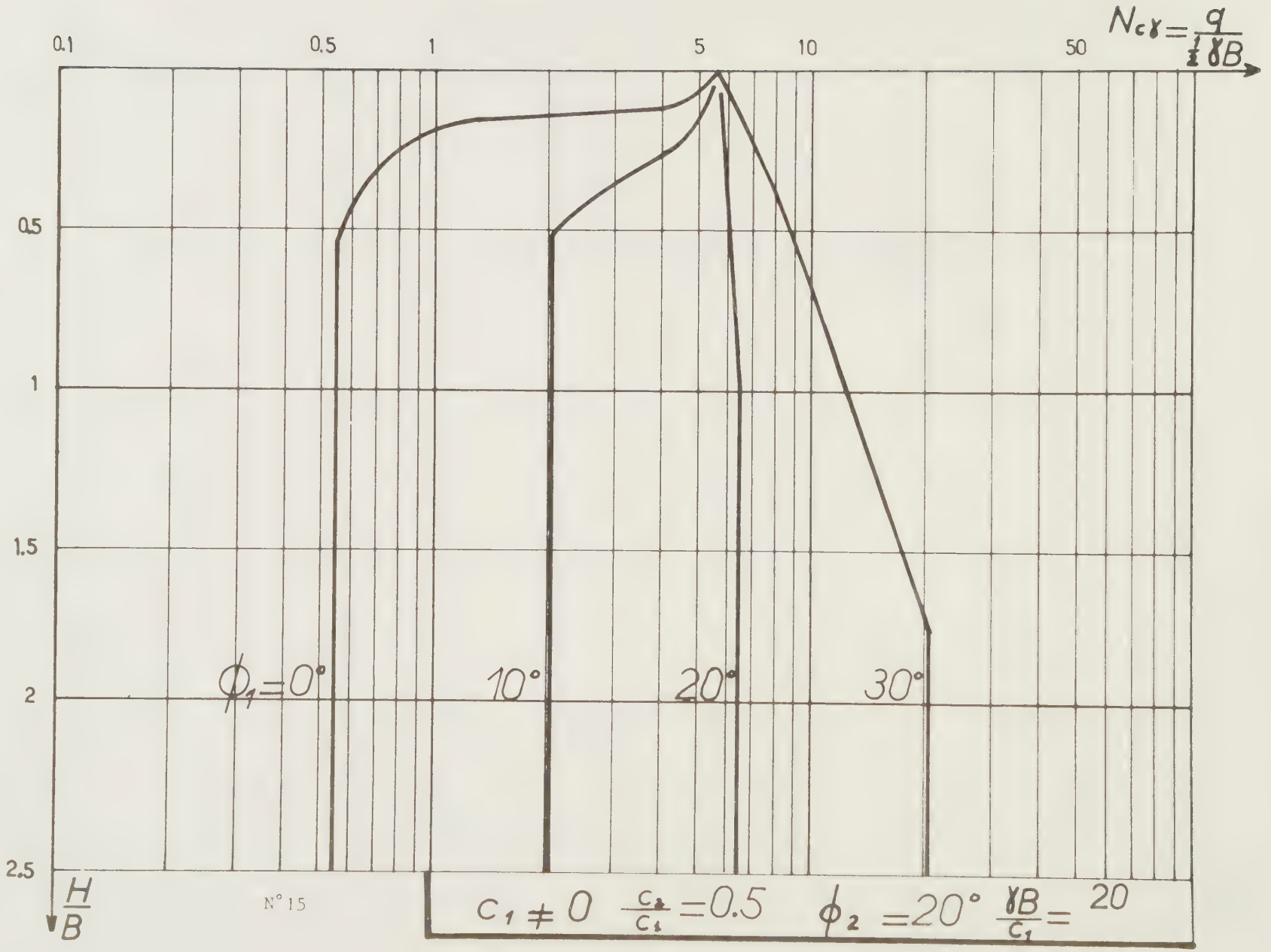

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 12
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 5$ $\phi_2 = 10°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20

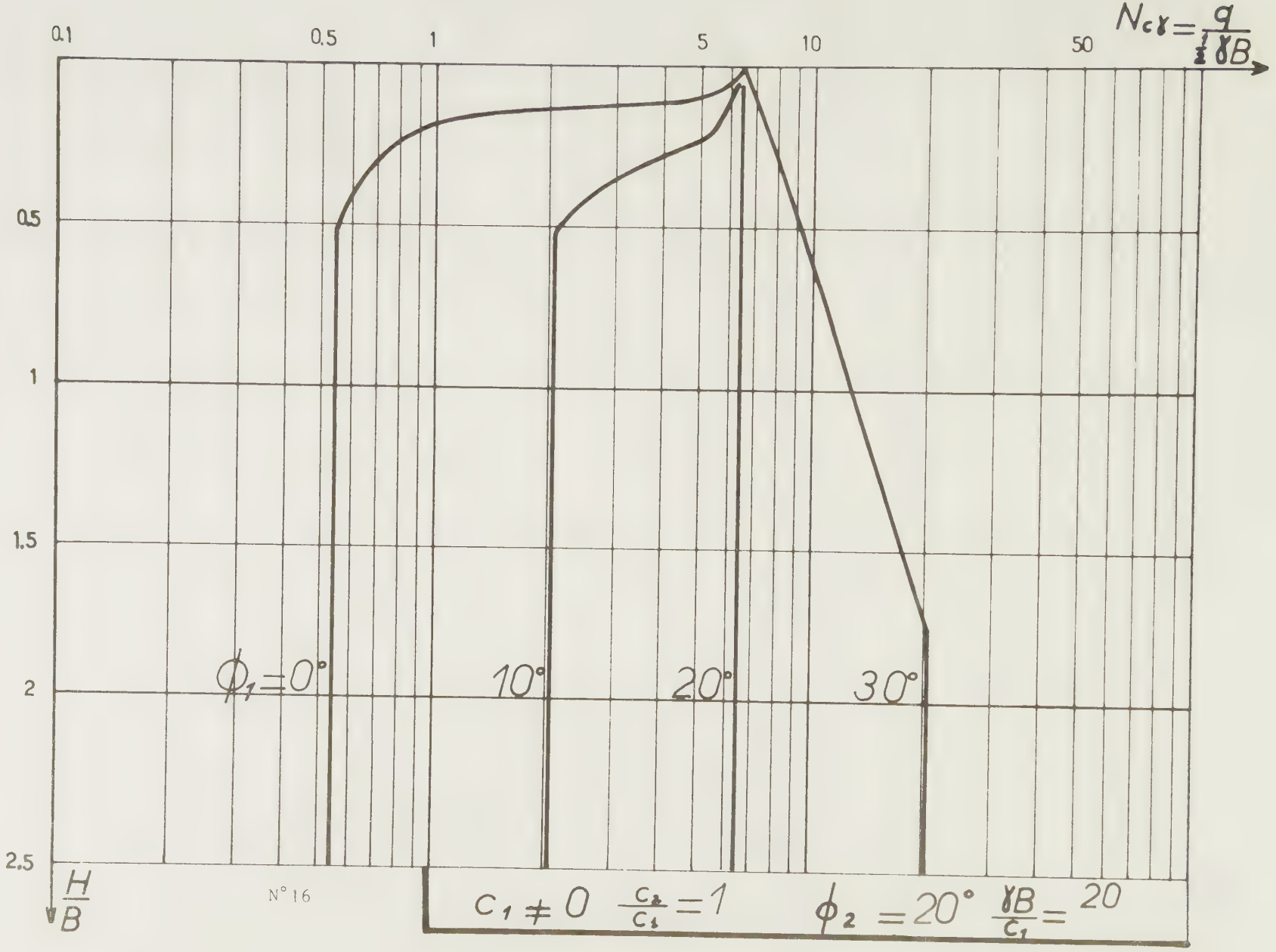

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 13
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 10$ $\phi_2 = 10°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$

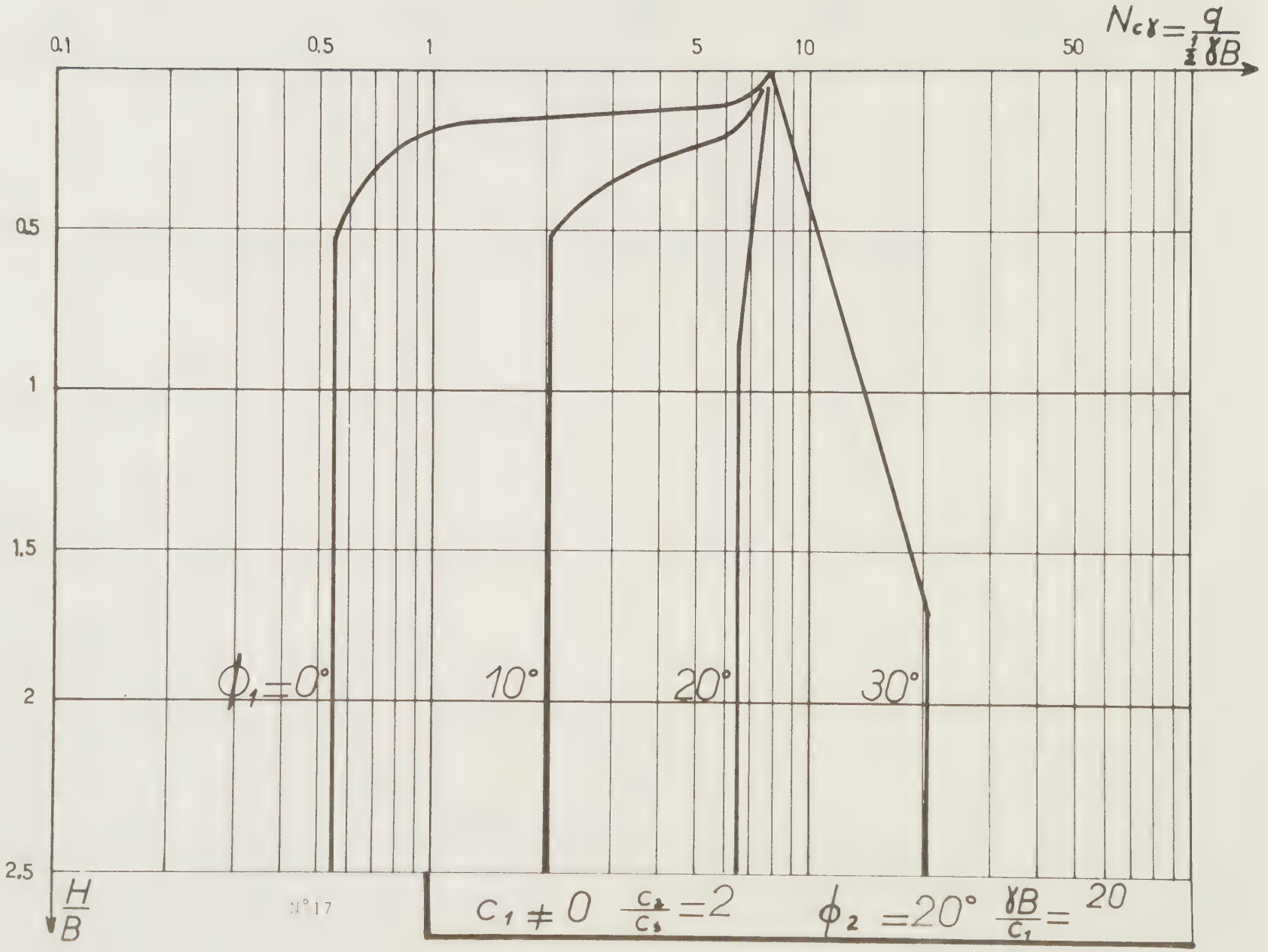
$c_1 \neq 0$

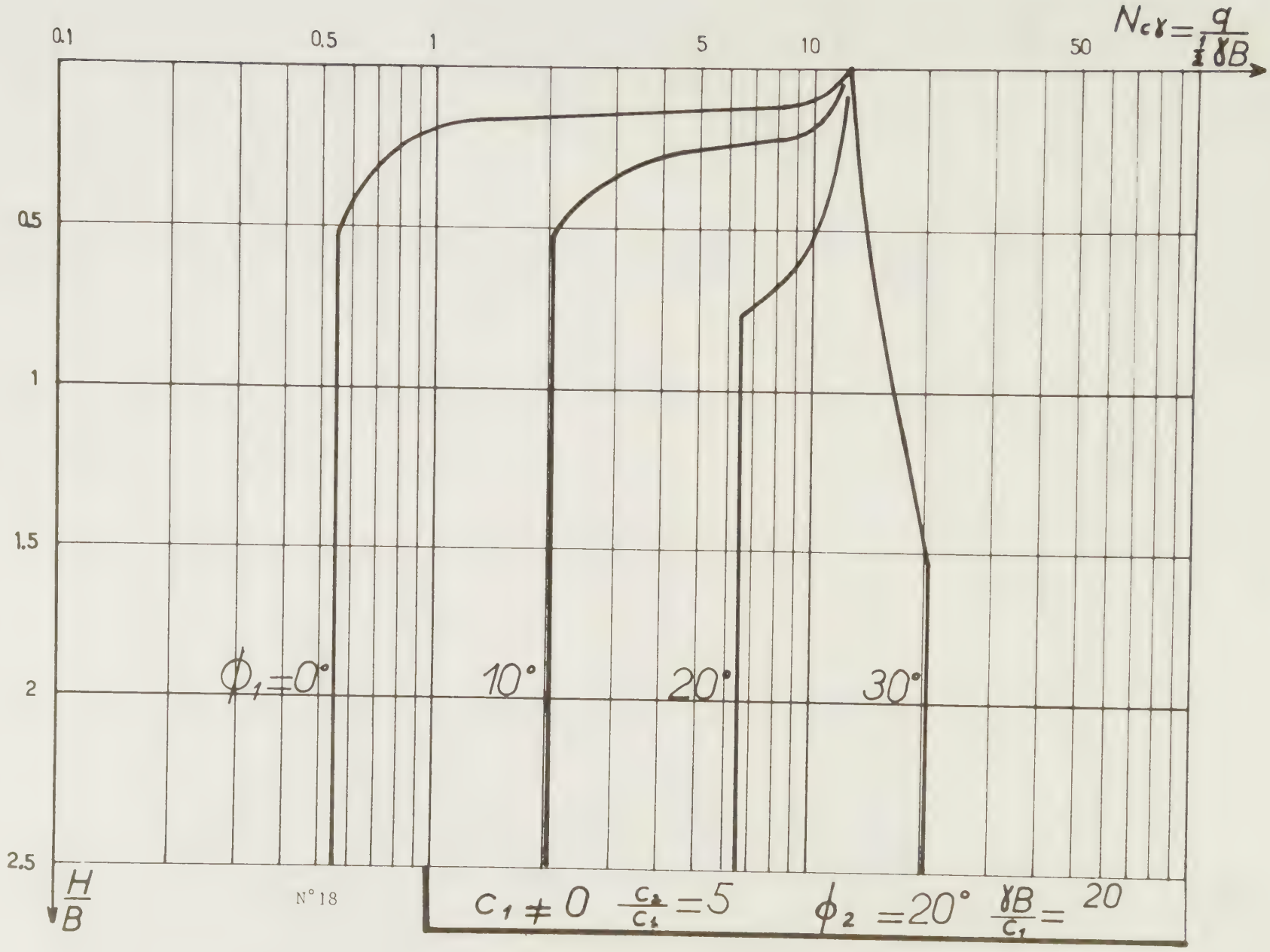
$\phi_2 = 20°$

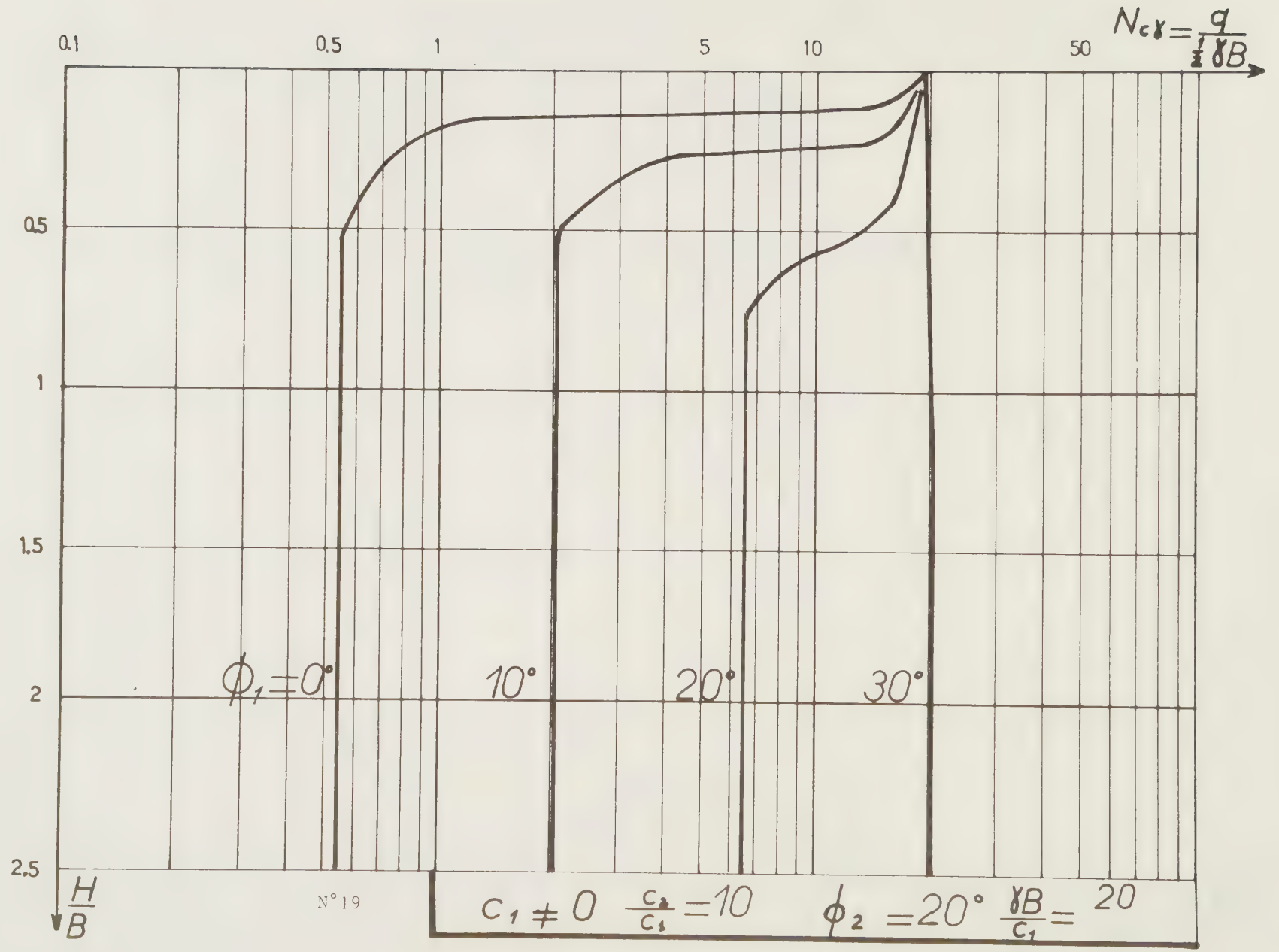

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 14
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0$ $\phi_2 = 20°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 15
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0.5$ $\phi_2 = 20°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 16
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 1$
$\phi_2 = 20°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20

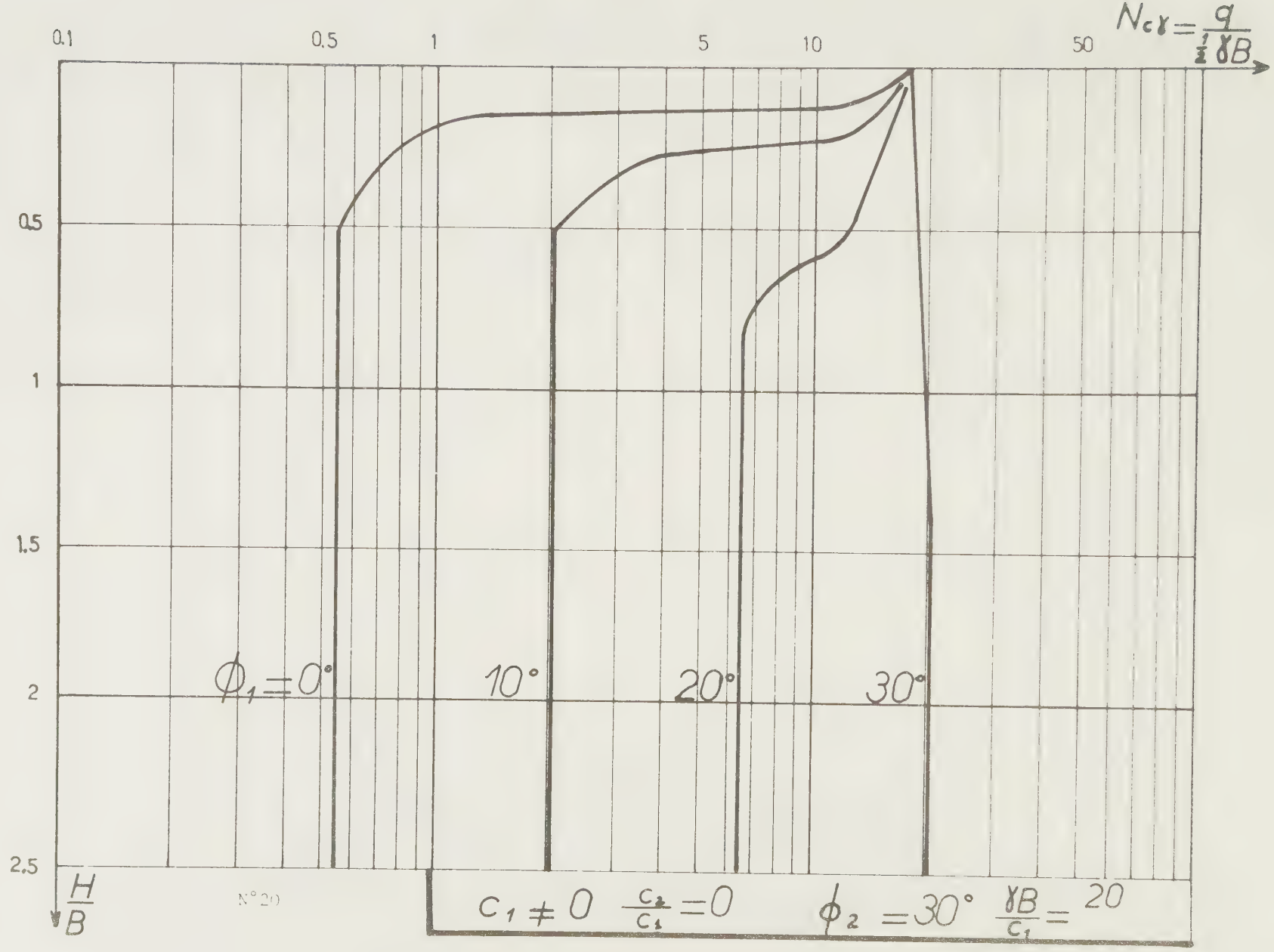

$N_{c\gamma}=\frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1=0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°17
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1}=2$
$\phi_2=20°$ $\frac{\gamma B}{c_1}=$ 20

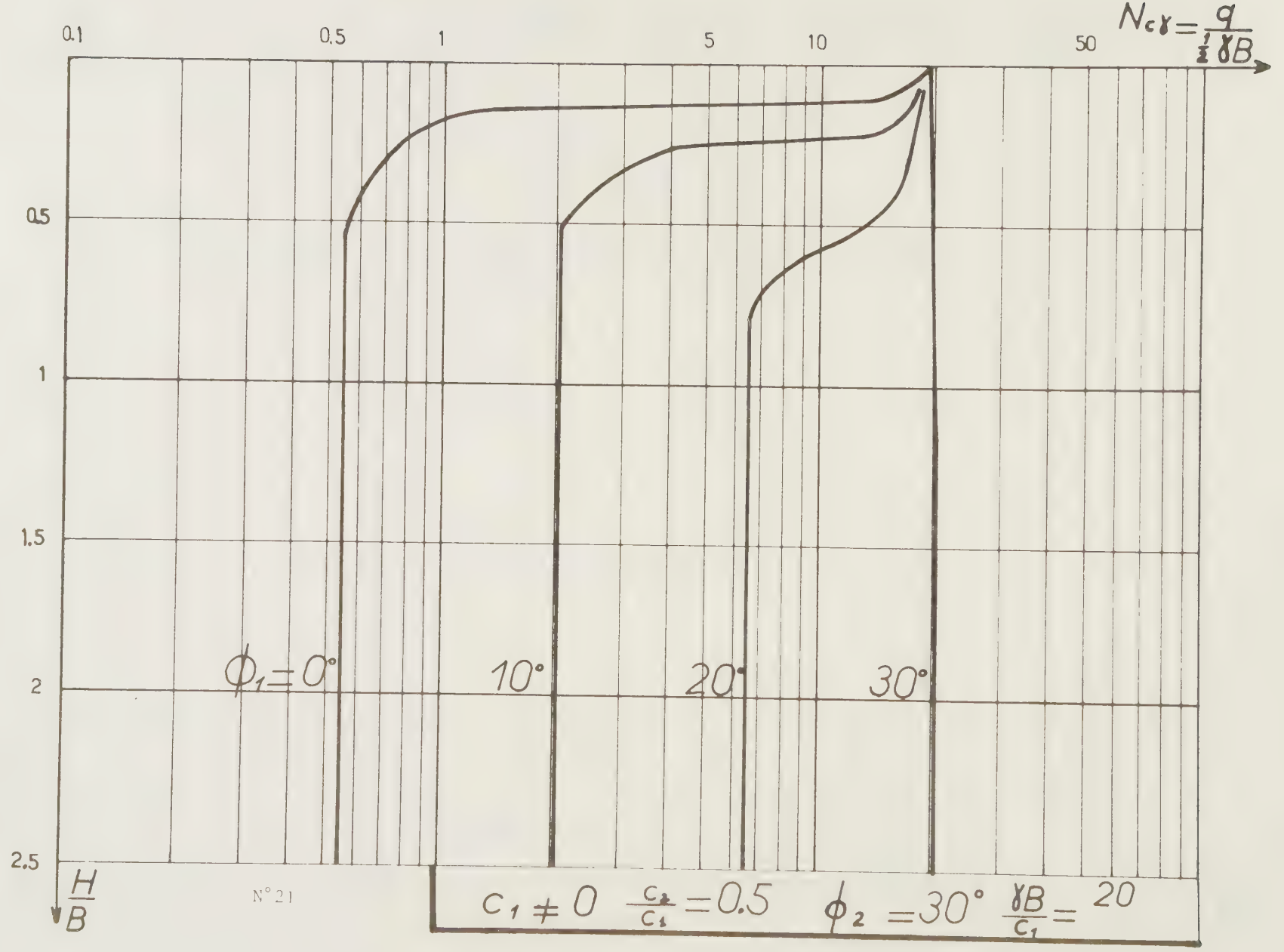

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
N° 18
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 5$
$\phi_2 = 20°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20

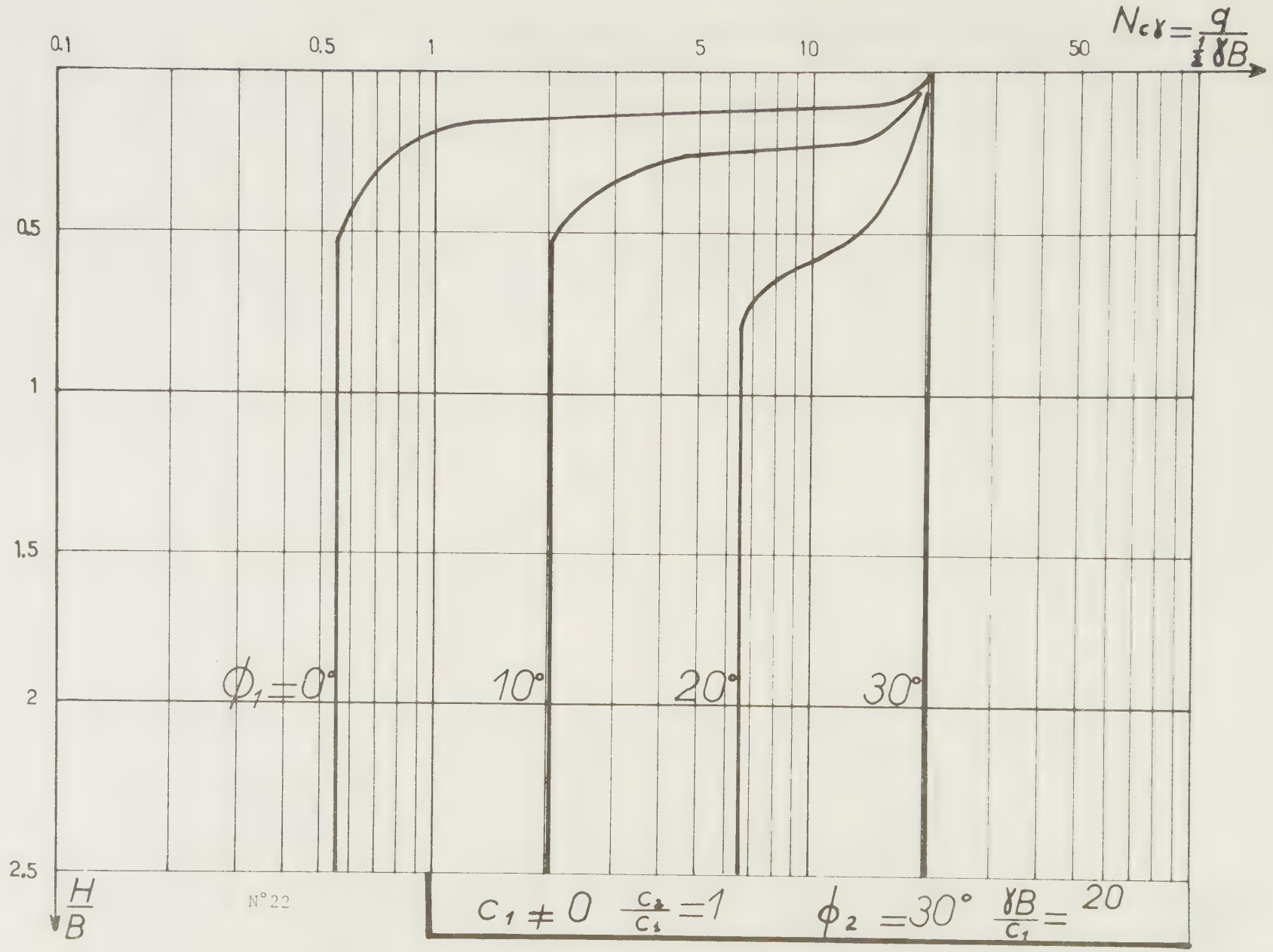

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
N° 19
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 10$ $\phi_2 = 20°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20

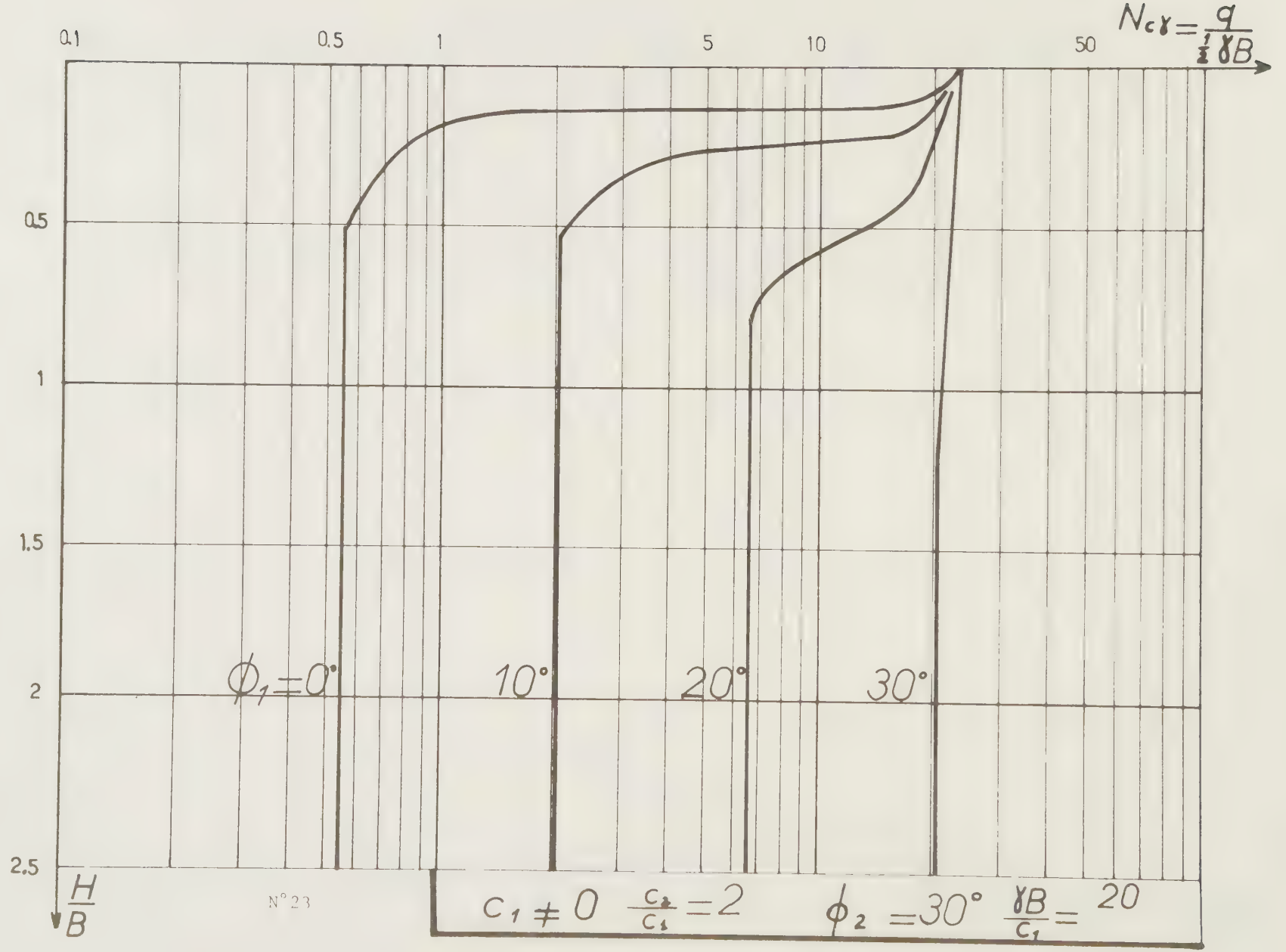
$$c_1 \neq 0$$

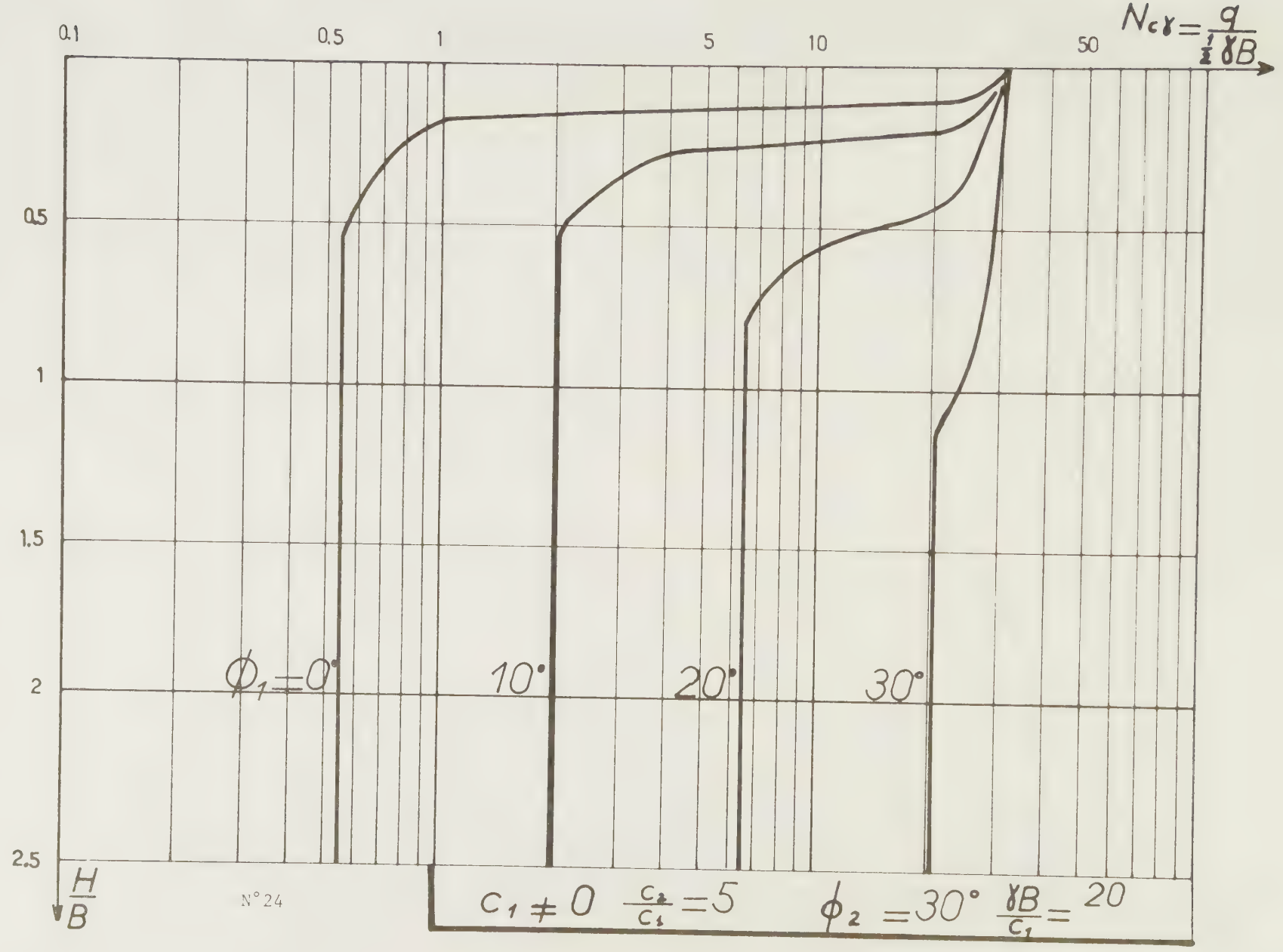
$$\phi_2 = 30^\circ$$

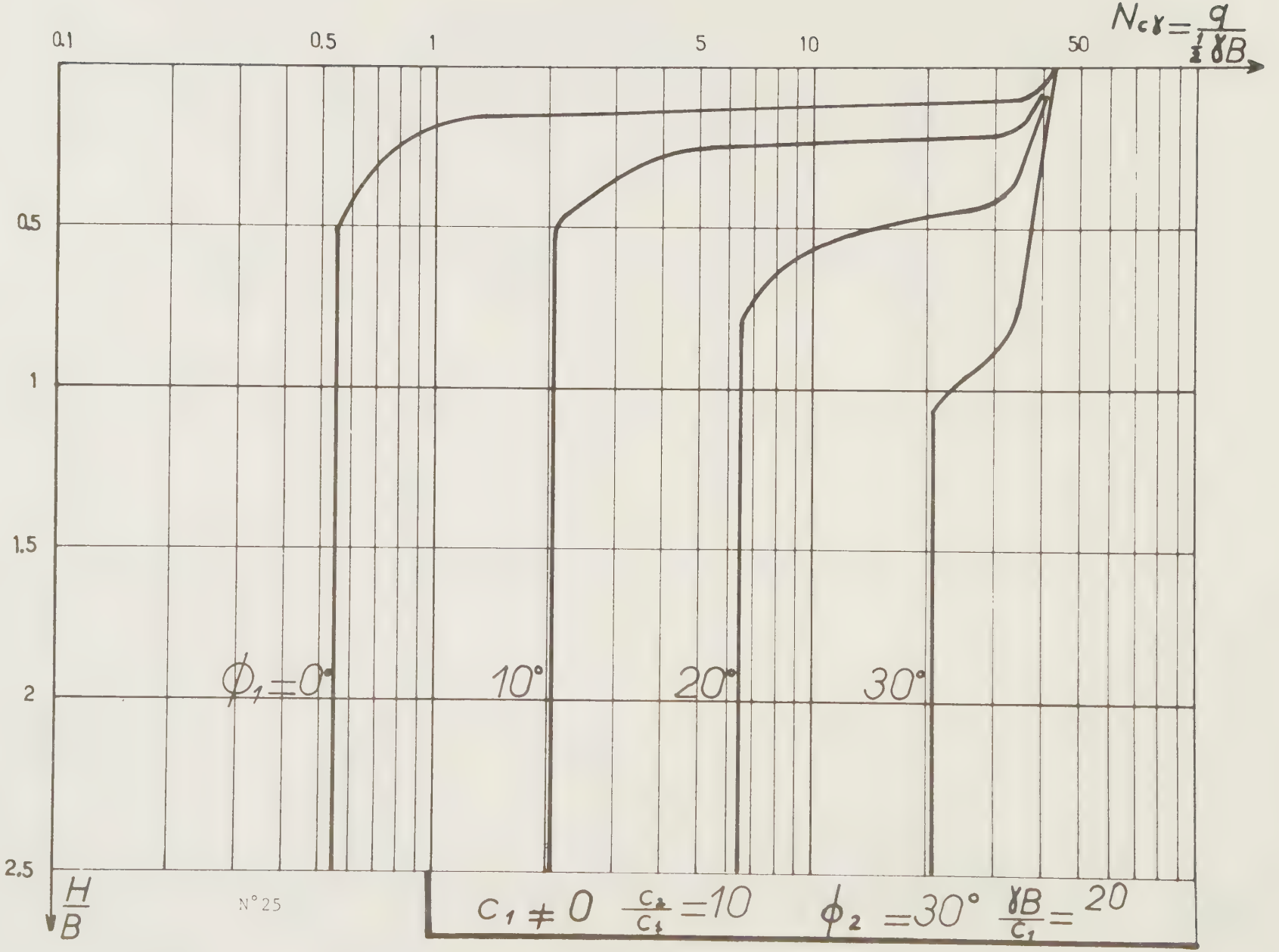

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°20
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0$ $\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 21
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0.5$ $\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°22
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 1$ $\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$

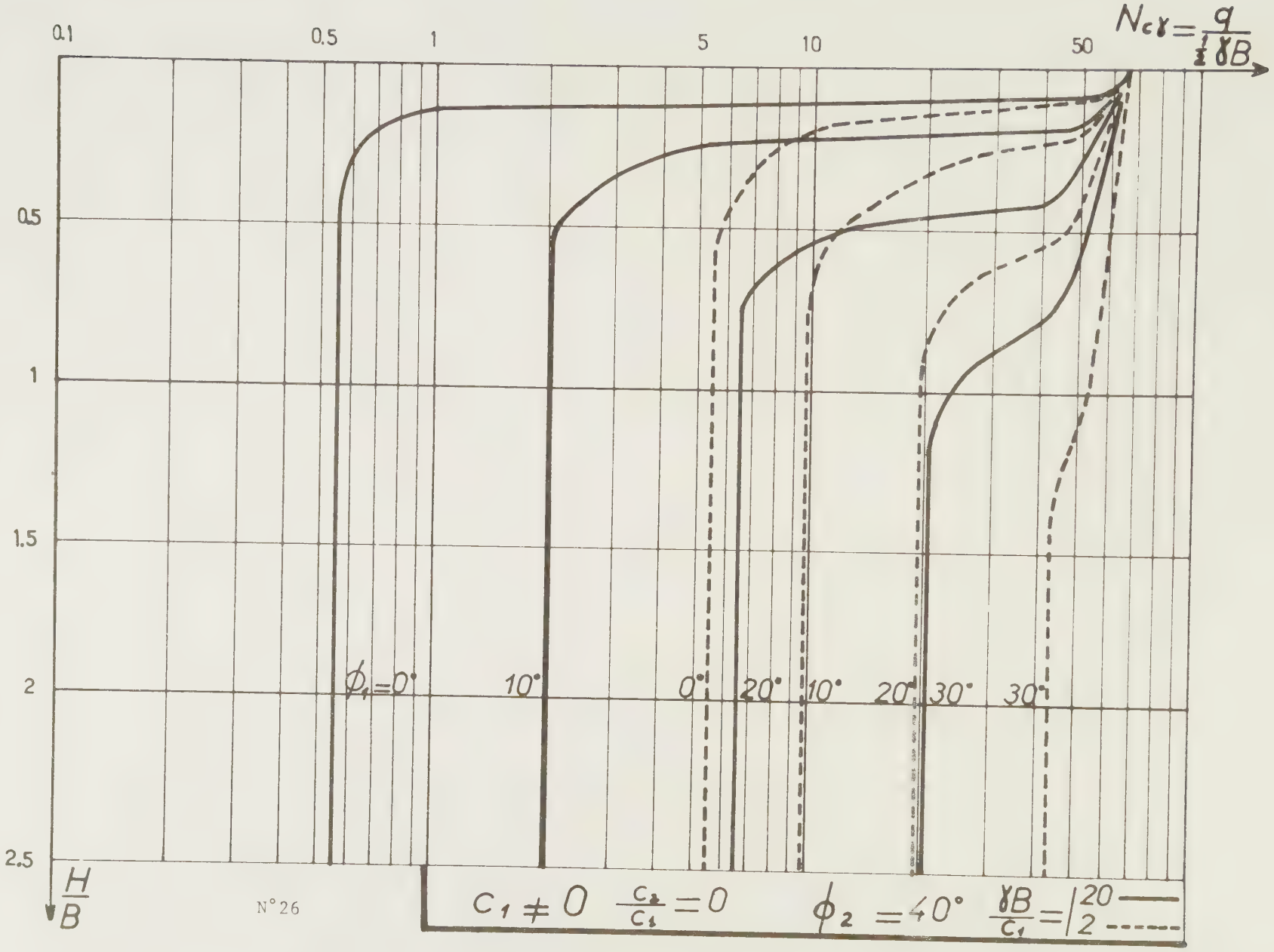

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°23
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 2$ $\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_1} =$ 20


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
N° 24
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 5$ $\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N° 25
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 10$ $\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = 20$

$c_1 \neq 0$

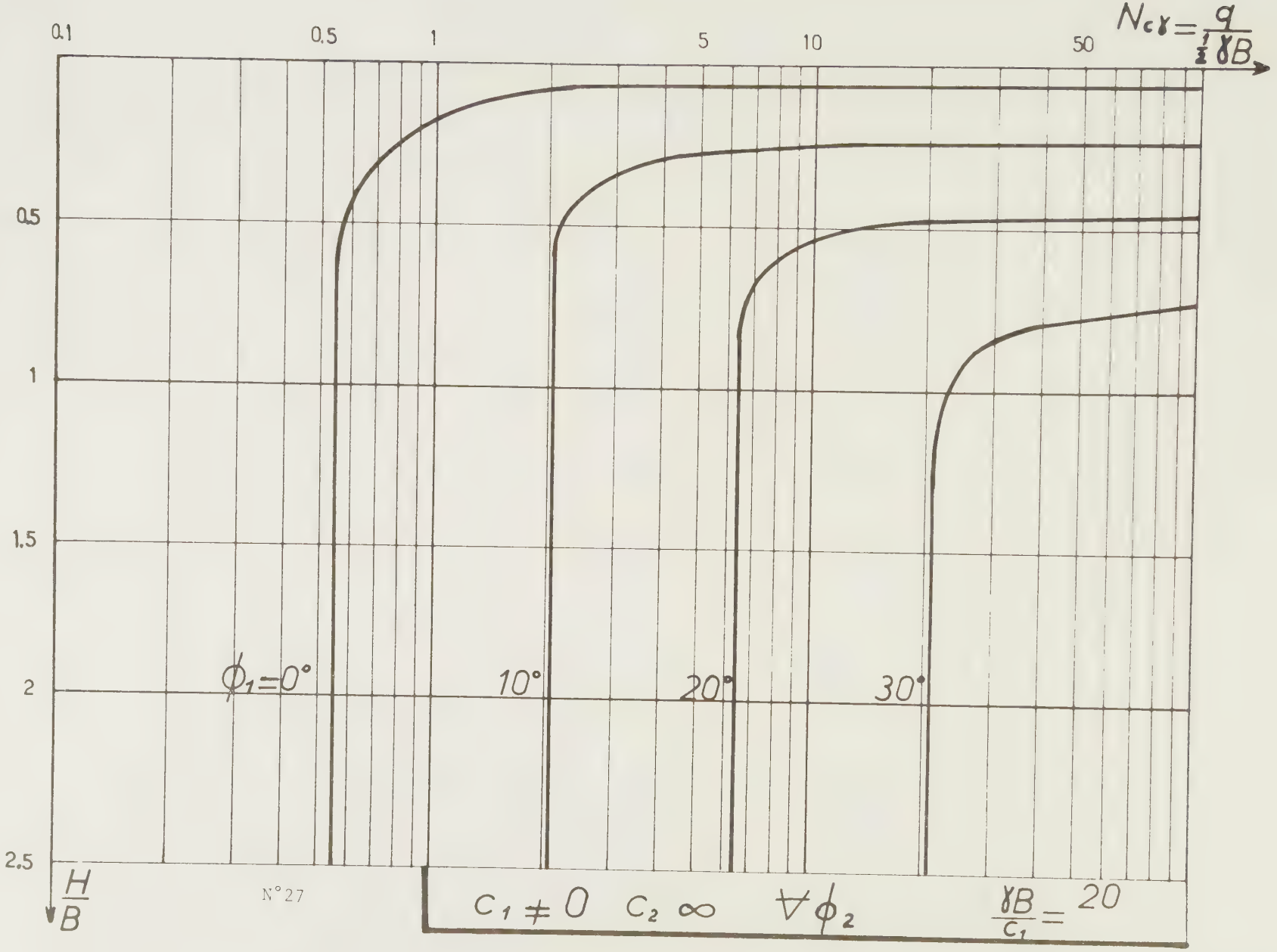
$\phi_2 = 40°$


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 0°$
10°
0°
20°
10°
20°
30°
30°
$c_1 \neq 0$ $\frac{c_2}{c_1} = 0$ $\phi_2 = 40°$ $\frac{\gamma B}{c_1} = \begin{matrix} 20 \\ 2 \end{matrix}$

N°26

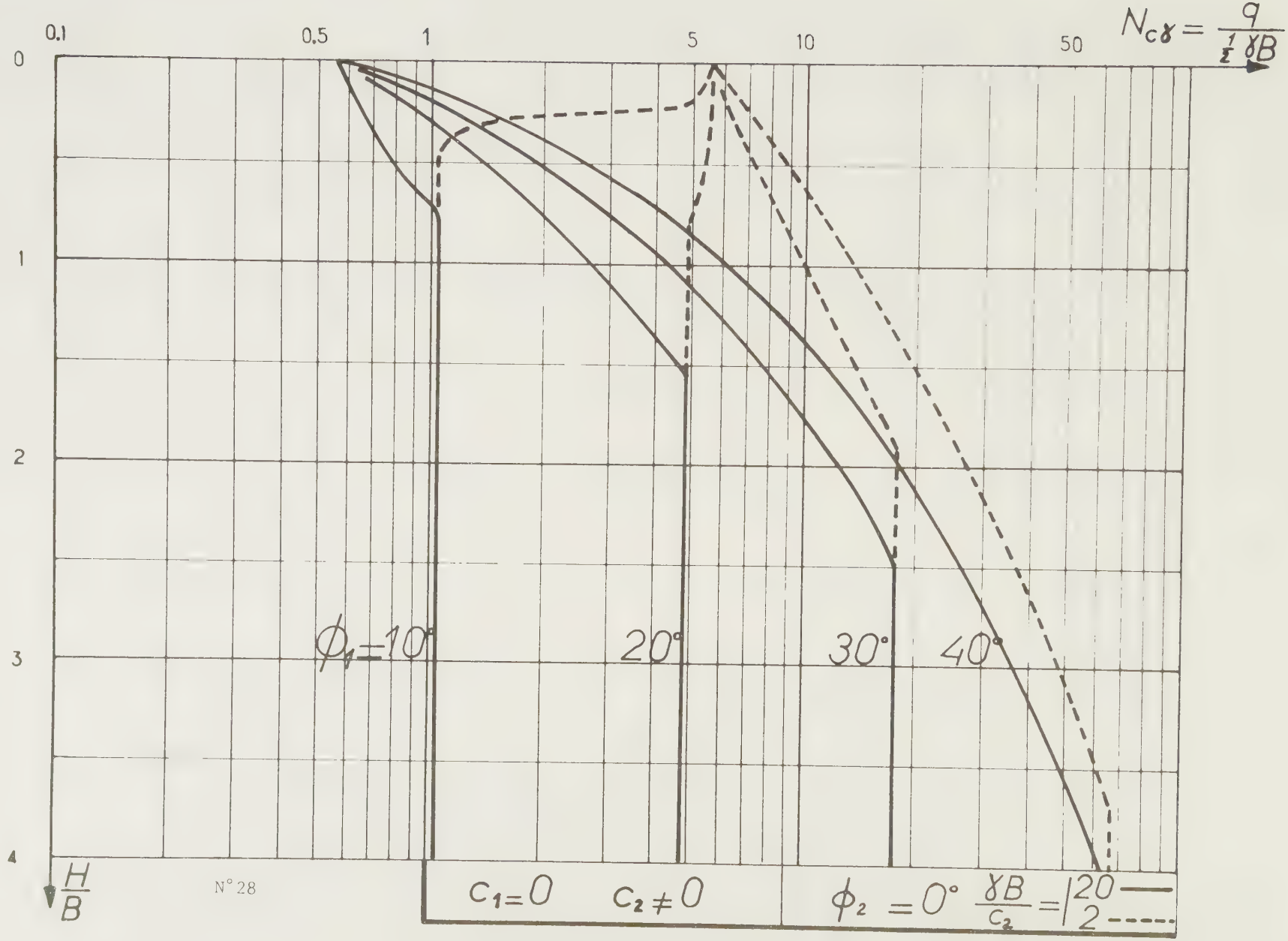
$c_1 \neq 0$

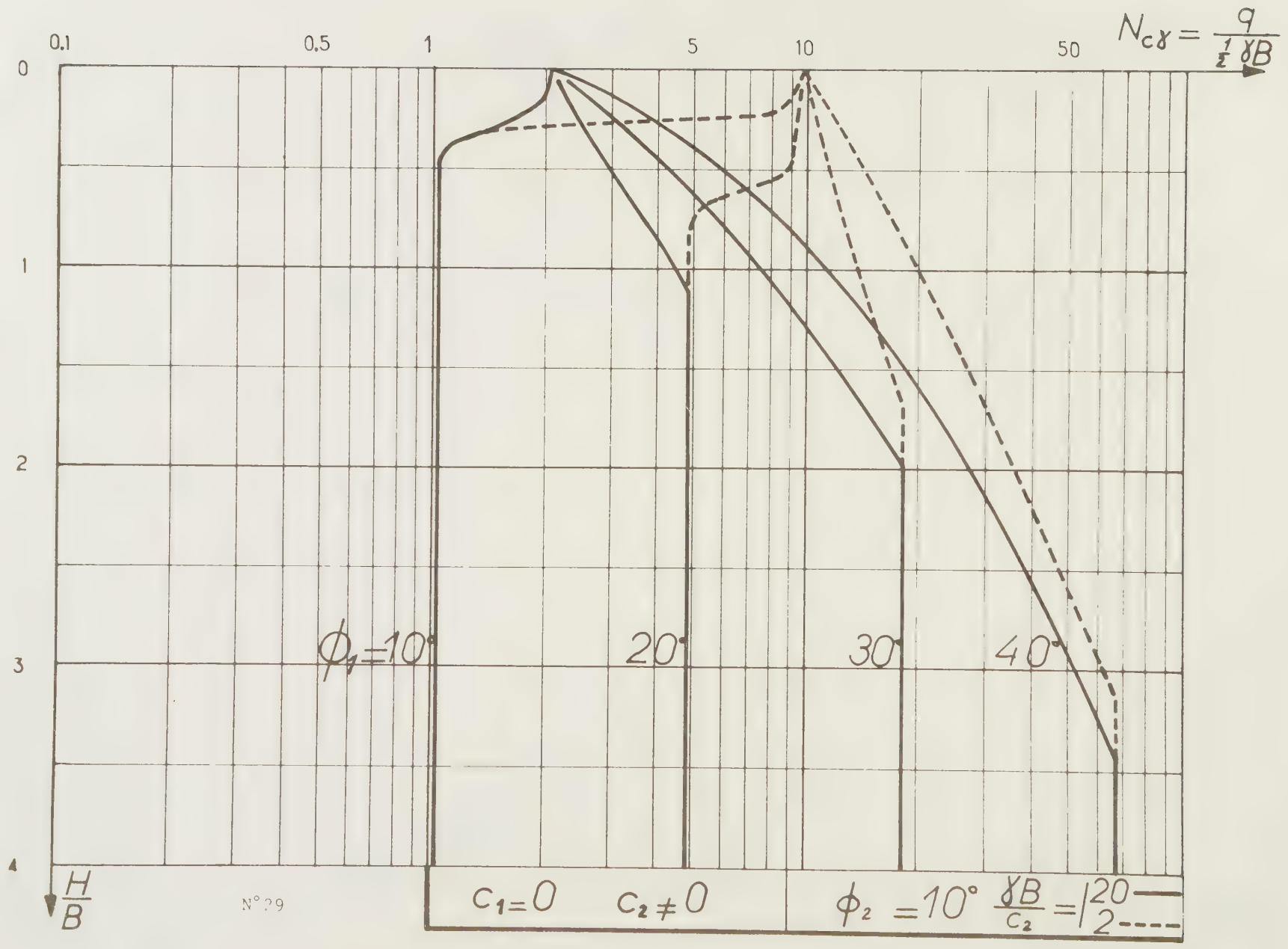
$c_2 \infty$

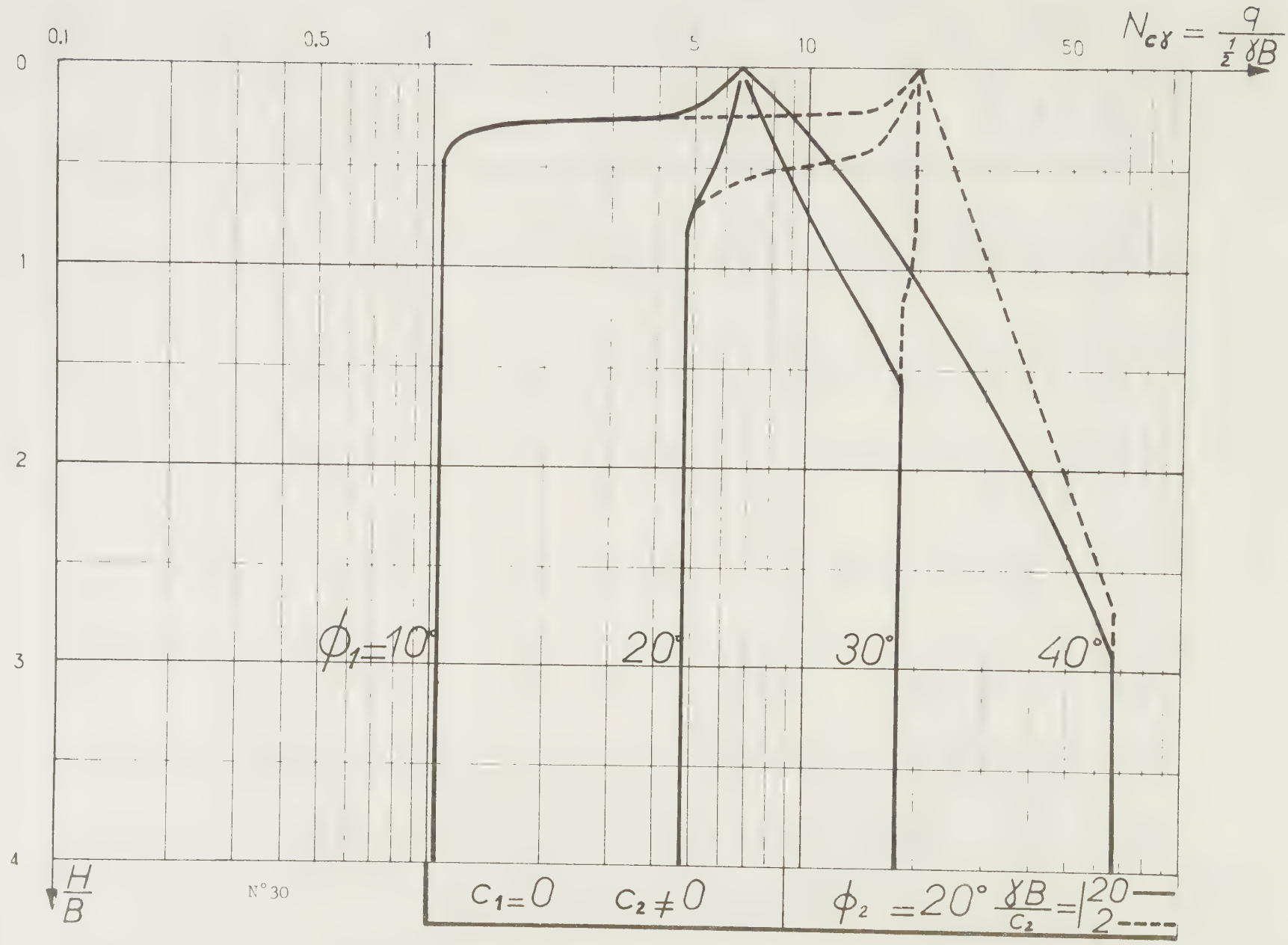

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0.5
1
1.5
2
2.5
$\phi_1 = 0°$
10°
20°
30°
$\frac{H}{B}$
N°27
$c_1 \neq 0 \quad c_2 \infty \quad \forall \phi_2$
$\frac{\gamma B}{c_1} = 20$

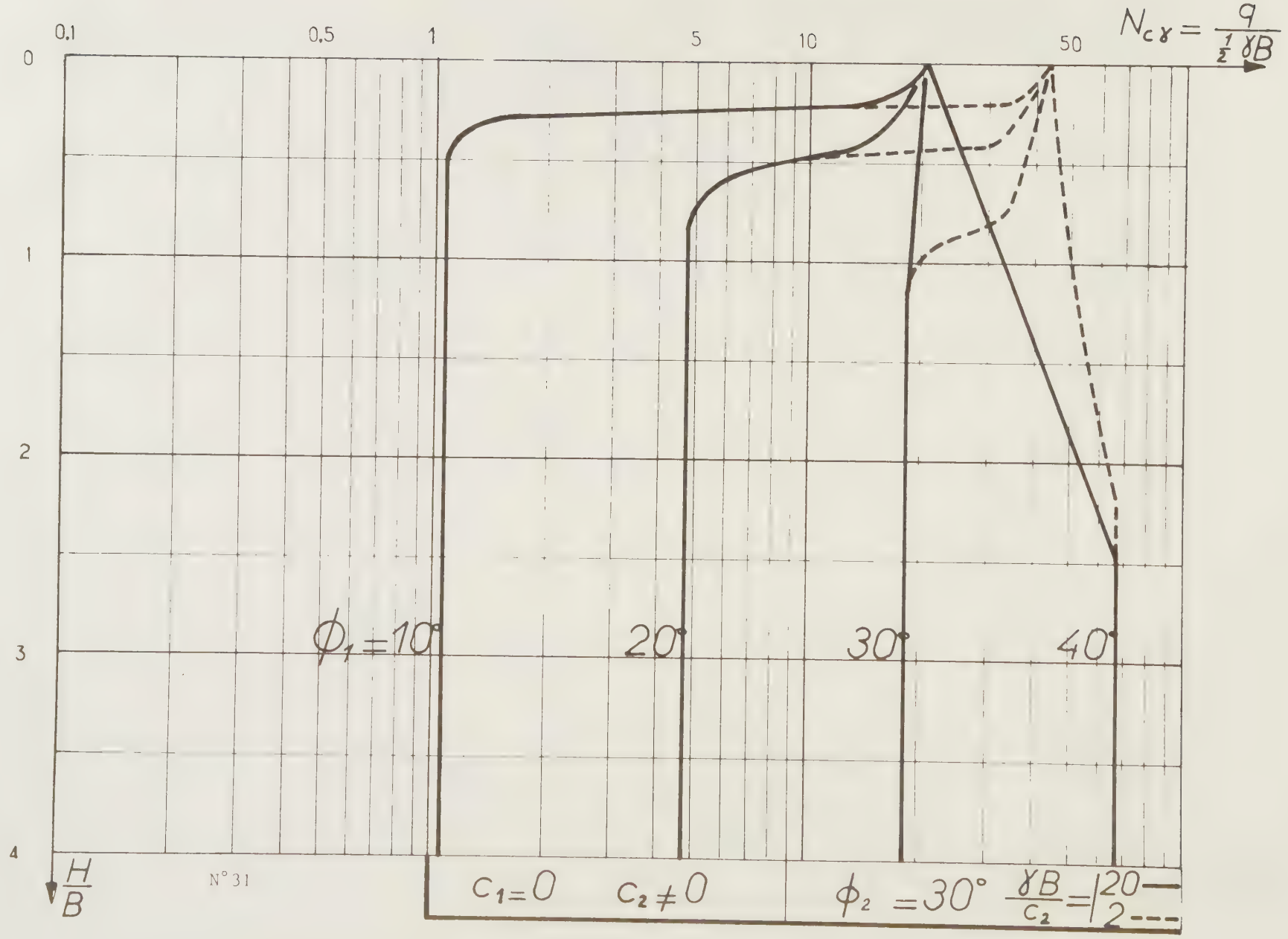
$$c_1 = 0$$

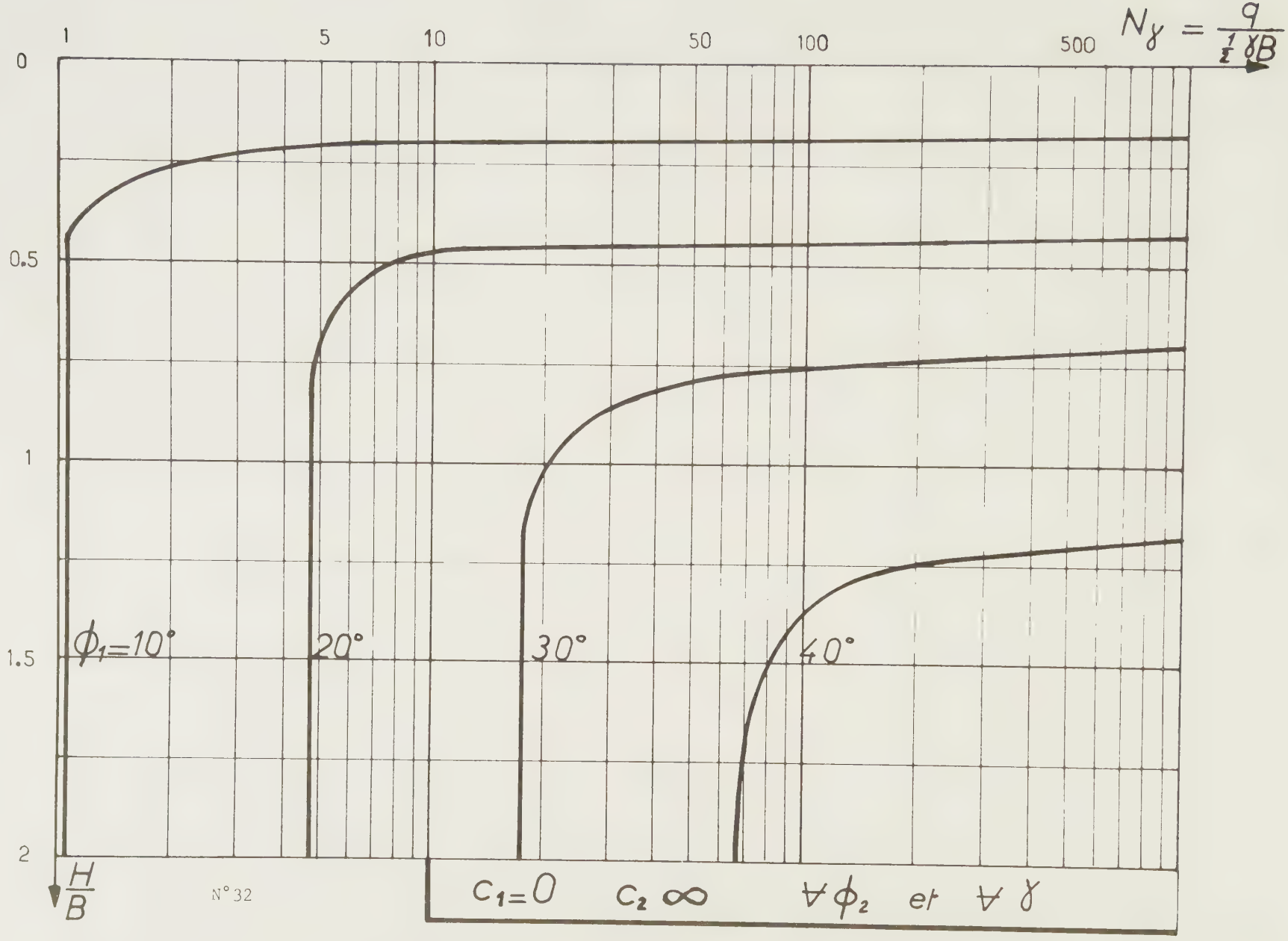
$$c_2 \neq 0$$


$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
ϕ_1=10°
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N° 28
$c_1 = 0$ $c_2 \neq 0$
$\phi_2 = 0°$ $\frac{\gamma B}{c_2}$ = 20 —— 2 ----

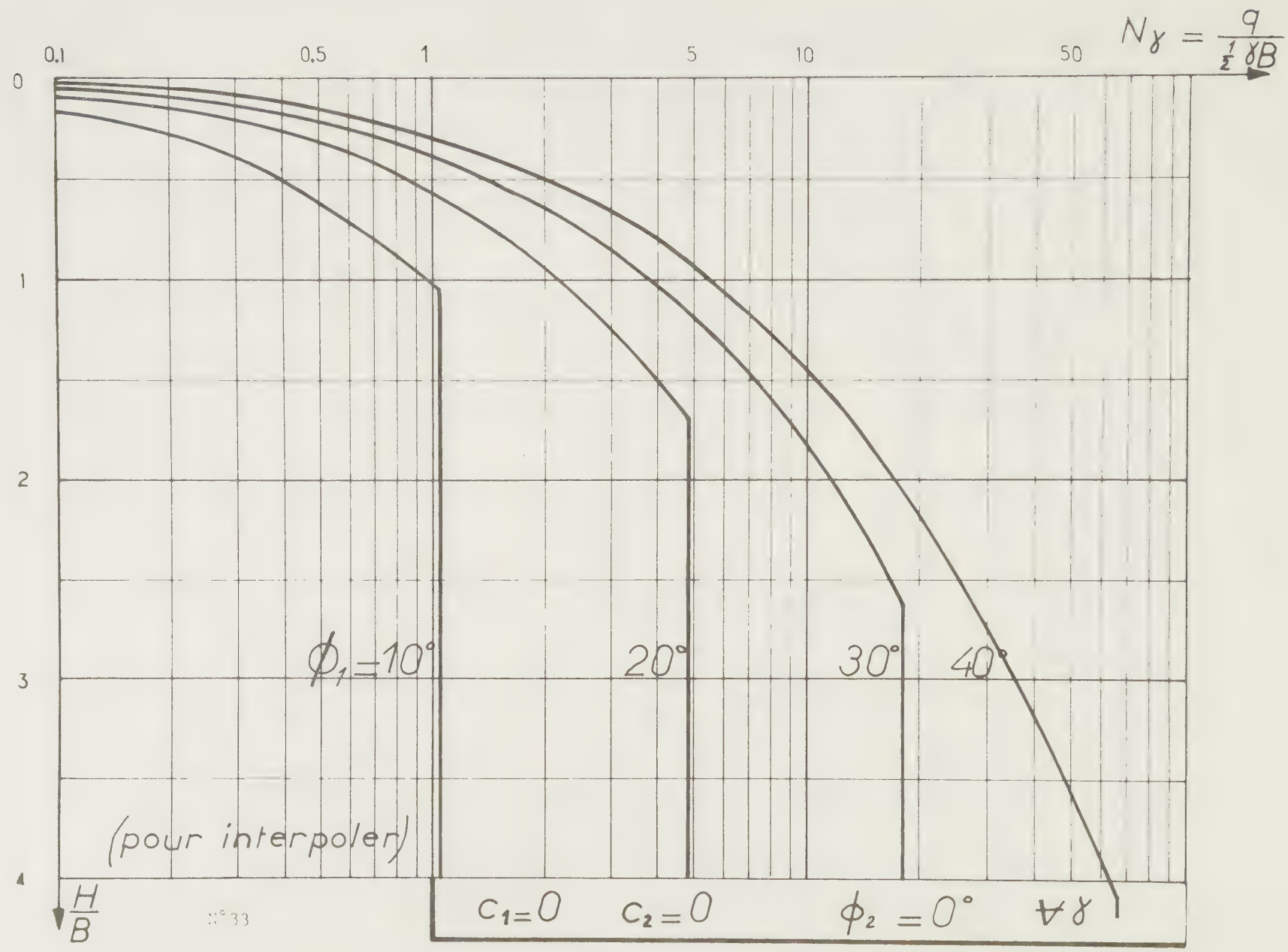

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N°29
$c_1 = 0$ $c_2 \neq 0$
$\phi_2 = 10°$ $\frac{\gamma B}{c_2} = \begin{matrix} 20 \\ 2 \end{matrix}$

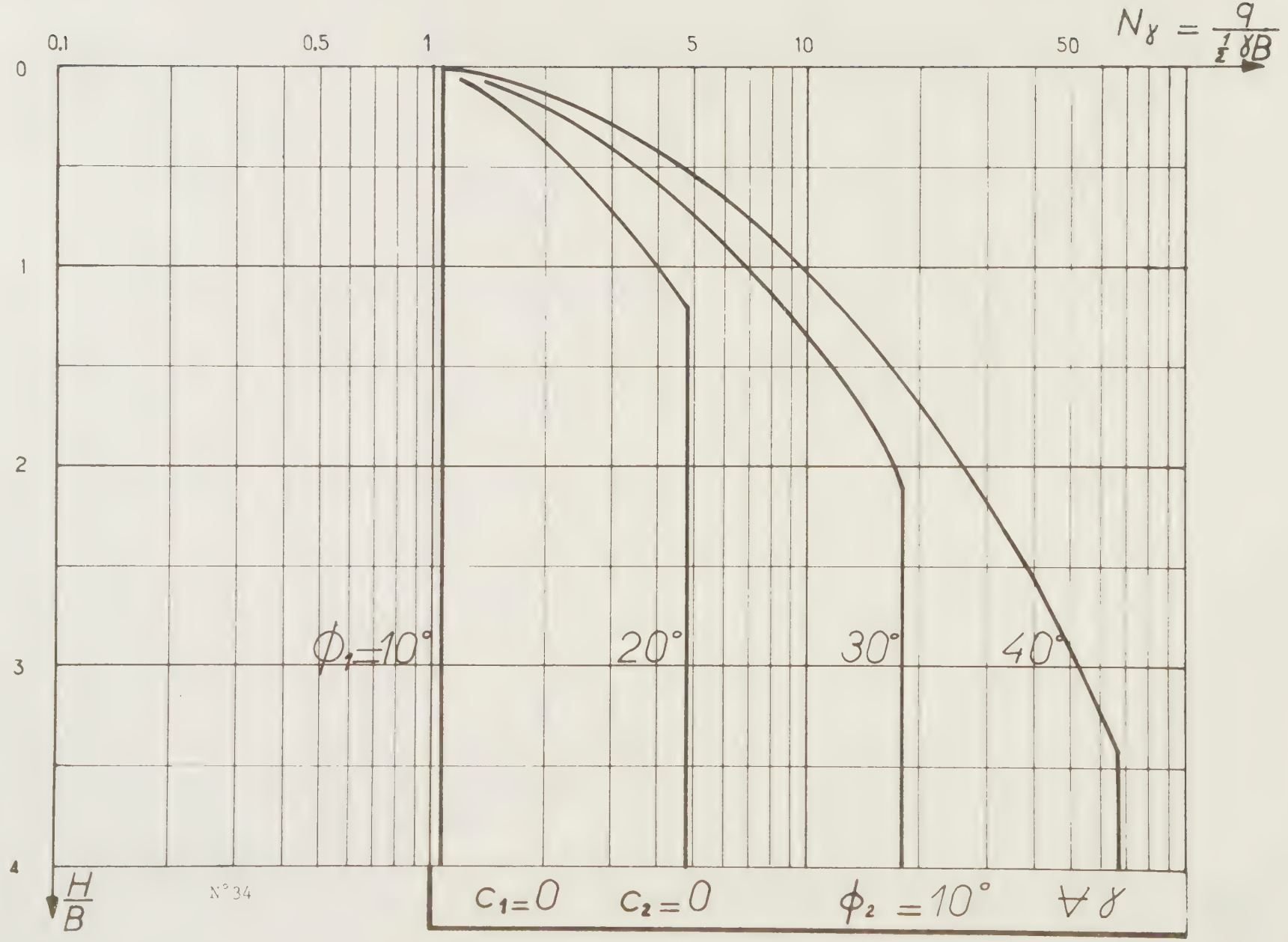

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N°30
$c_1 = 0$ $c_2 \neq 0$
$\phi_2 = 20° \frac{\gamma B}{c_2} = \begin{vmatrix} 20 \\ 2 \end{vmatrix}$

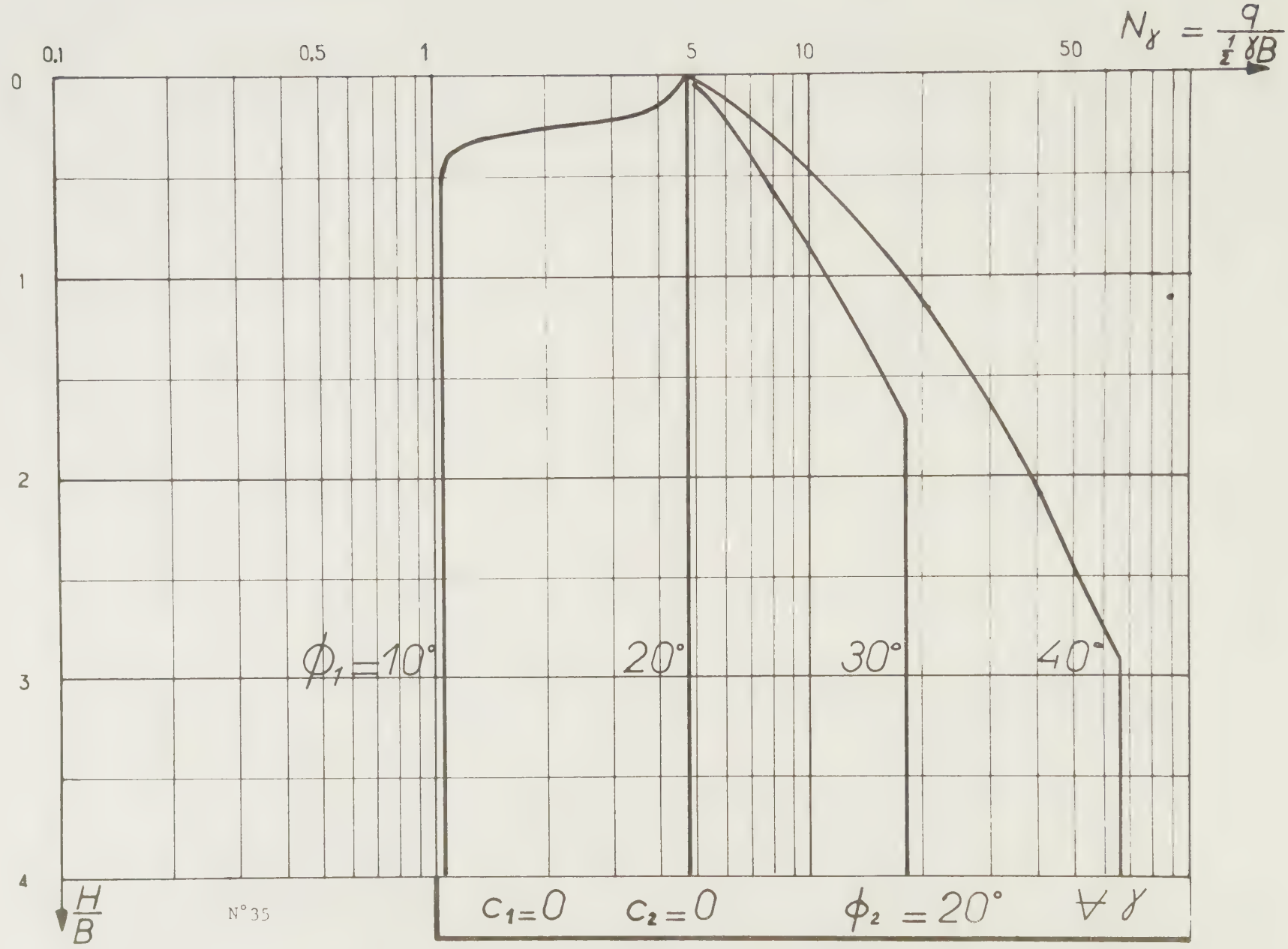

$N_{c\gamma} = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N° 31
$c_1 = 0$ $c_2 \neq 0$
$\phi_2 = 30°$ $\frac{\gamma B}{c_2} = 120$ 2

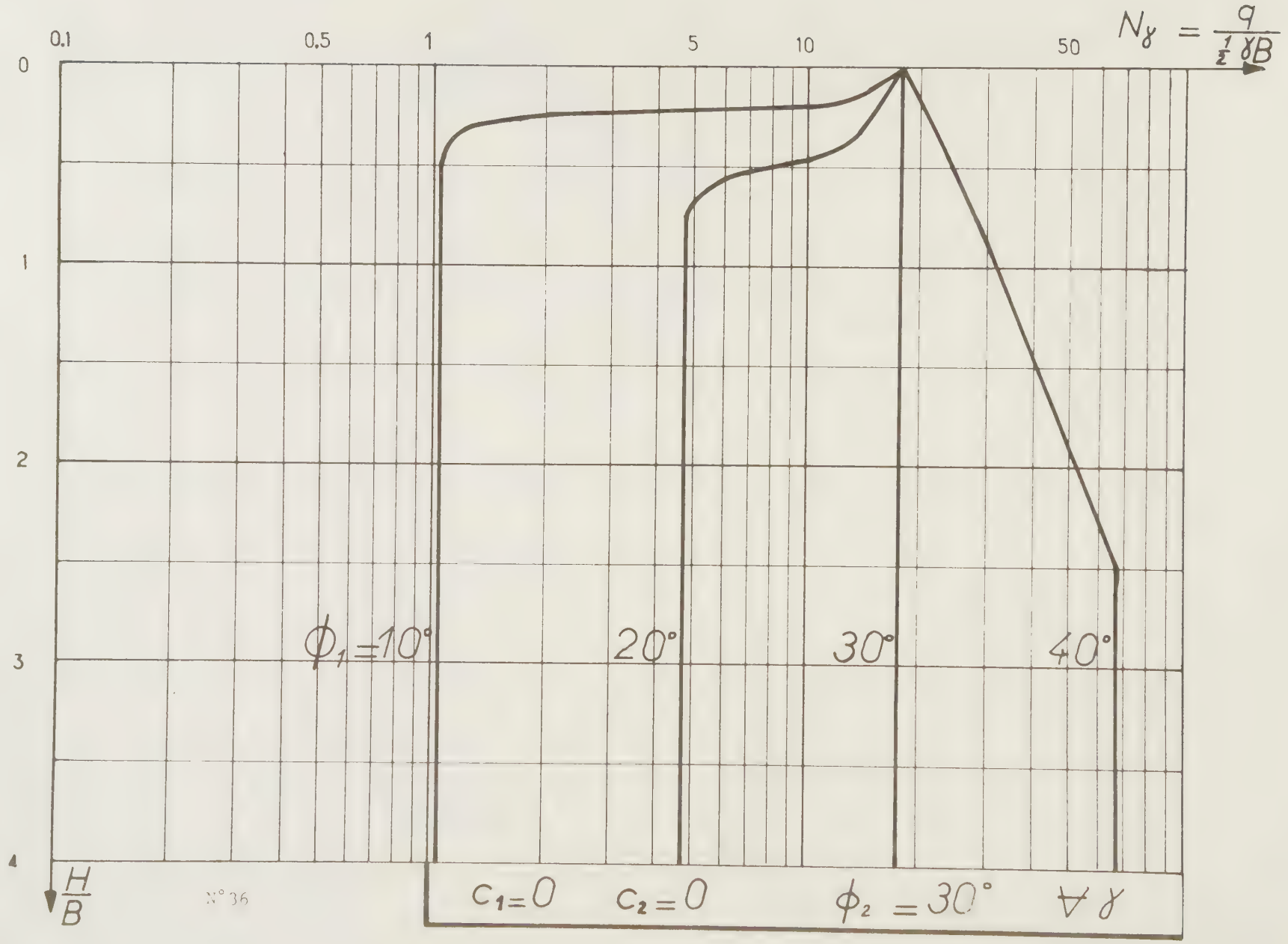

$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
1
5
10
50
100
500
0
0.5
1
1.5
2
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N° 32
$c_1 = 0$ $c_2 \infty$ $\forall \phi_2$ et $\forall \gamma$

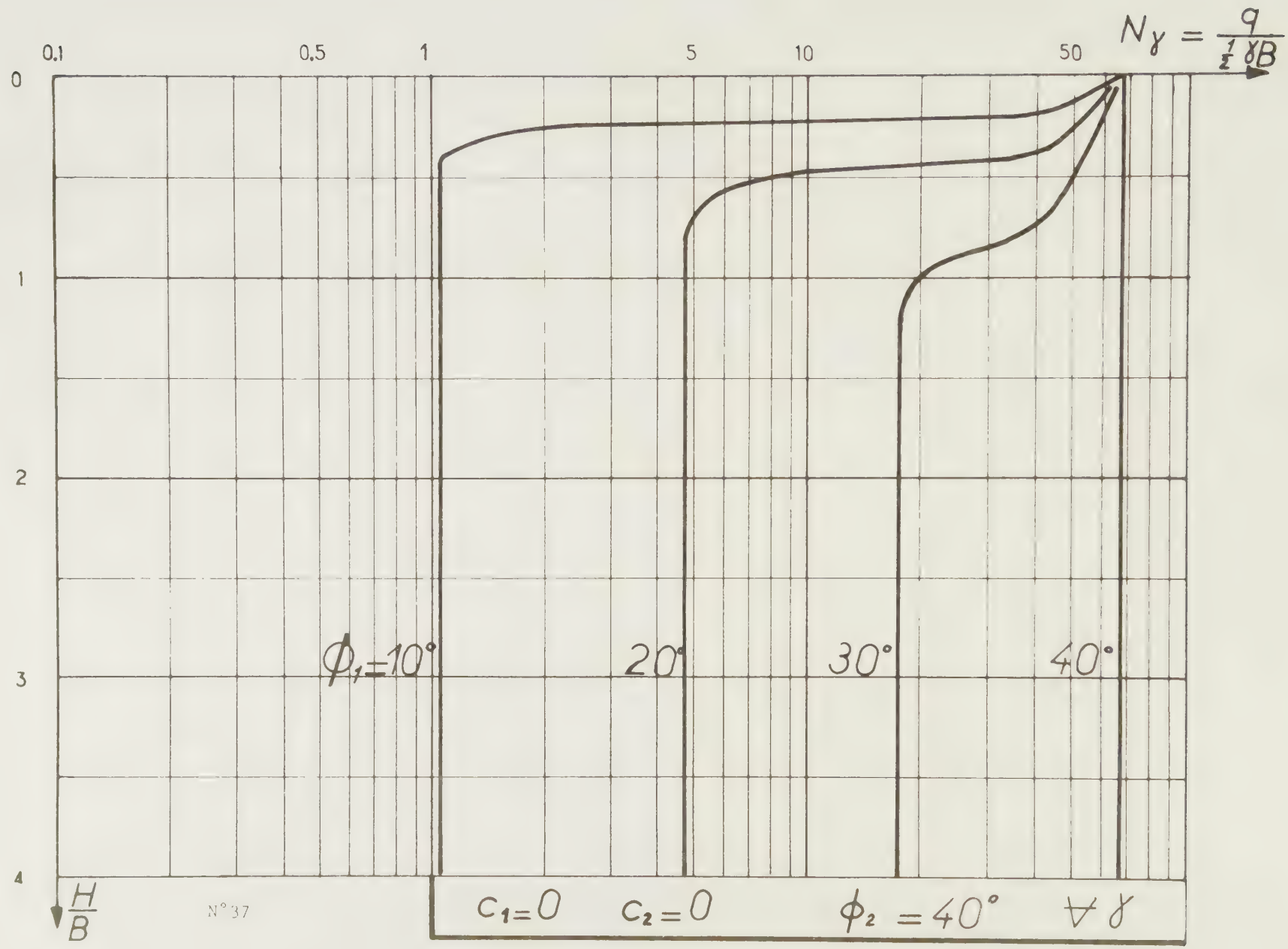
$$c_1 = c_2 = 0$$


$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
(pour interpoler)
$\frac{H}{B}$
$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$\phi_2 = 0°$
$\forall \gamma$


$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\frac{H}{B}$
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$\phi_2 = 10°$
$\forall \gamma$
N°34


$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N°35
$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$\phi_2 = 20°$
$\forall\ \gamma$


0.1
0.5
1
5
10
50
$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N° 36
$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$\phi_2 = 30°$
$\forall \gamma$


$N_\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}\gamma B}$
0.1
0.5
1
5
10
50
0
1
2
3
4
$\phi_1 = 10°$
20°
30°
40°
$\frac{H}{B}$
N°37
$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$\phi_2 = 40°$
$\forall\, \gamma$